REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE MOSTAFA BEN BOULAÏD BATNA 2
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DES TECHNIQUES MATHEMATIQUES (LTM)

# THÈSE

Présentée en vue d'obtenir le diplôme de Doctorat en Mathématiques

Par

**Saci Atef**

THÈME

## Problèmes inverses pour des équations aux dérivées partielles

Soutenue le 23/11/2023, devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| M. Mennouni Abdeaziz | Prof. | Président | *Université Batna 2* |
| M. Rebiai Salah-Eddine | Prof. | Rapporteur | *Université Batna 2* |
| M. Benjeddou Ahmed | Prof. | Examinateur | *Université Setif 1* |
| M. Bensalem Naceurdine | Prof. | Examinateur | *Université Setif 1* |
| M. Saoudi Khaled | Prof. | Examinateur | *Université de Khenchela* |
| Mme. M. Kada | MCA | Examinatrice | *Université Batna 2* |

## Dédicaces

*De tout mon coeur je dédie ce modeste travail A :*

*Ma chère mère et mon cher père*

Ma femme

Mes fils : Khalil, Ghilas

Mes cheres soeurs et mes chers frères

Toute ma famille

Mes très chers amis

**ATEF**

## REMERCIEMENTS

En préambule à cette thèse je remercie vivement et avant tout notre grand Dieu, qui m'a donné la force, le courage et la patience d'accomplir ce modeste travail.

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mon directeur de thèse, Pr. REBIAI SALAH-EDDINE, pour m'avoir encadré pendant ces années de thèse. C'était de bonnes conditions de travail grâce à sa disponibilité et ses encouragements constants.

Je tiens également à remercier les membres de jury, d'avoir accepté de relire mon manuscrit, le professeur MENNOUNI ABDELAZIZ de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse, le professeur BENDJEDDOU AHMED mon professeur et mon directeur de mémoire de magister, le professeur BENSALEM NACEURDINE mon professeur de magister, le professeur SAOUDI KHALED, et le docteur KADA MAISSA pour leur participation au jury.

# Notations

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{\Omega}$ | : | la fermeture topologique de l'ensemble $\Omega$. |
| $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ | : | la dérivée de $u$ par rapport à $t$. |
| $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ | : | la dérivée seconde de $u$ par rapport à $t$. |
| $\nabla$ | : | l'opérateur gradient par rapport aux variables d'espace. |
| $\Delta$ | : | l'opérateur de Laplace. |
| $\mathrm{div}\,(V) = \nabla.V$ | : | divergence du vecteur $V$. |
| $L^2(\Omega)$ | = | $\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^2 dx < \infty\}$. |
| $L^\infty(\Omega)$ | = | $\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle qu'il existe $C$, $\lvert u(x)\rvert \leq C$ p.p sur $\Omega\}$. |
| $W^{1.\infty}(\Omega)$ | = | $\{u \in L^\infty(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega), i = 1, ..., n\}$. |
| $H^m(\Omega)$ | = | $\{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \lvert\alpha\rvert \leq m\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n, \lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. |
| $C_0^\infty(\Omega)$ | = | $\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $u$ indéfiniment diérivables et à support compact$\}$. |
| $C^m([0,T], X)$ | = | $\{u : [0,T] \longrightarrow X$ telle que $u$ de classe $C^m\}$. |

| | | |
|---|---|---|
| $L^2(0,T,X)$ | = | $\{u : [0,T] \longrightarrow X$ mesurable telle que, $\int_0^T \lVert u(t)\rVert_X^2 dt < \infty\}$. |
| $H^m(0,T,X)$ | = | $\{u, \frac{d^j u}{dt^j} \in L^2(0,T,X), 1 \leq j \leq m\}$. |
| $C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ | = | $\{u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u$ de classe $C^m\}$. |
| $\lVert u\rVert_{L^2(\Omega)}$ | = | $\left(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$. |
| $\lVert u\rVert_{H^m(\Omega)}$ | = | $\left(\sum_{\lvert\alpha\rvert \leq m} \lVert D^\alpha u\rVert_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. |
| $\lVert u\rVert_{C([0,T],\ X)}$ | = | $\max_{0\leq t\leq T} \lVert u(t)\rVert_X$. |
| $\lVert u\rVert_{L^2([0,T],\ X)}$ | = | $\left(\int_0^T \lVert u(t)\rVert_X^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}}$. |
| $\lVert u\rVert_{L^\infty([0,T],\ X)}$ | = | $ess\ \sup_{0\leq t\leq T} \lVert u(t)\rVert_X$. |
| $\lVert u\rVert_{H^1([0,T],\ X)}$ | = | $\left(\lVert u\rVert_{L^2([0,T],\ X)}^2 + \lVert u_t\rVert_{L^2([0,T],\ X)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. |

# Table des matières

**Dédicaces** ii

**Remerciements** iii

**Notations** iv

**Table des matières** v

**Introduction** 1

**1 Présentation générale des problèmes inverses** 3

1.1 Problèmes directs, problèmes inverses . . . . . 4

1.2 Problèmes bien posé et problèmes mal posé. . . . . 5

1.3 Problèmes inverses gouvernés par des EDP . . . . . 6

**2 Inégalités de Carleman** 8

2.1 Introduction . . . . . 9

2.2 Inégalités de Carleman et hypothèses principales . . . . . 10

2.2.1 Estimation de Carleman au niveau $H^1 \times L^2$ pour l'équation des ondes . . . . . 12

2.2.2 Estimation de Carleman au niveau $H^1$ pour l'équation de Schrödinger . . . . . 13

**3 Problème inverse pour un système couplé ondes-ondes** 16

3.1 Introduction . . . . . 17

3.2 Énoncé du problème . . . . . 18

3.3 Résultats principaux . . . . . 20

3.4 Unicité du problème inverse dans le cas linéaire . . . . . 21

3.5 Unicité du problème inverse dans le cas non linéaire . . . . . 33

3.6 Inégalité d'observabilité . . . . . 33

3.7 Stabilité du problème inverse dans le cas linéaire . . . . . 35
3.8 Stabilité du problème inverse dans le cas non linéaire . . . . . 40

**4 Problème inverse pour l'équation de Schrödinger 41**

4.1 Introduction . . . . . 42
4.2 Énoncé du problème . . . . . 43
4.3 Résultats principaux . . . . . 45
4.4 Unicité du problème inverse dans le cas linéaire . . . . . 46
4.5 Unicité du problème inverse dans le cas non linéaire . . . . . 51
4.6 Inégalité d'observabilité . . . . . 52
4.7 Stabilité du problème inverse dans le cas linéaire . . . . . 53
4.8 Stabilité du problème inverse dans le cas non linéaire . . . . . 58

**5 Problème inverse pour un système couplé ondes-Schrödinger 59**

5.1 Énoncé du problème . . . . . 60
5.2 Résultats principaux . . . . . 62
5.3 Unicité du problème inverse dans le cas linéaire . . . . . 64
5.4 Inégalité d'observabilité . . . . . 74
5.5 Stabilité du problème inverse dans le cas linéaire . . . . . 83
5.6 Unicité et stabilité du problème inverse dans le cas non linéaire . . . . . 89

**Conclusion et perspectives 93**

**Annexe A 94**

**Annexe B 99**

**Bibliographie 106**

# Introduction

Dans le cas de l'étude de phénomènes dans la nature, on peut calculer les paramètres physiques d'un modèle physique. Il existe deux types de problèmes : les problèmes directs et les problèmes inverses. Dans les problèmes directs, les chercheurs tentent de trouver des fonctions exactes ou approchées pour des modèles décrivant divers phénomènes. Dans ces problèmes, les coefficients et les termes sources sont supposés connus. Souvent, cependant, ces coefficients et termes sources ne sont pas connus, ce qui introduit des problèmes inverses lorsqu'il s'agit de déterminer les coefficients ou (et) les termes sources d'une équation ou d'un système d'équations à partir de l'information sur la solution du problème direct.

Généralement, les problèmes inverses et les problèmes directs sont complémentaires, en effet, la résolution du problème inverse ne se fait pas sans une modélisation préalable du phénomène étudié, autrement dit sans la résolution du problème direct correspondant qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables. Ensuite, à partir des mesures expérimentales obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à valider le modèle par résolution du problème inverse. Ce type de problème se rencontre dans de nombreuses applications ([61, 35]), on peut citer entre autres : l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X) [13], l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir) **[57]**, l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques), la chimie (détermination des constantes de réaction), le radar et l'acoustique sous-marine (détermination de la forme d'un obstacle), le traitement d'image (restauration d'images floues) [48], diffusion des polluants [24], et ...etc, dont la modélisation mathématique est formulée par des équations aux dérivées partielles (EDP). Dans notre thèse, nous nous intéressons à ce type de problème inverse, c'est-à-dire les problèmes inverses pour des EDP.

Il y a des avancées considérables dans les problèmes inverses et la théorie du contrôle pour les EDP, qui sont liés à la détermination des paramètres, des coefficients, et des termes sources. L'inégalité de Carleman est l'un des outils utilisés pour prouver des résultats d'unicité et de stabilité du problème inverse de la détermination des paramètres, des coefficients, et des termes sources dans les EDP. Elle est également utilisé pour prouver des inégalités d'observabilité qui donnent des résultats de contrôlabilité.

Il y a trois grands types de problématiques associés aux problèmes inverses pour des EDP

► Question d'identifiabilité (**unicité** du problème inverse)

► Question de la régularisation (**stabilité** du problème inverse)

►Algorithmes pratiques (utiliser des méthodes numériques pour calculer des inconnues du problème inverse).

Dans cette thèse, nous nous intéressons au traitement de la première et deuxième problématiques pour une classe des EDP. Plus précisemment, nous étudions les problèmes suivants :

- **Unicité et stabilité Lipschitzienne** pour le problème inverse consistant à déterminer les coefficients de potentiel dans un système couplé ondes-ondes avec conditions aux limites de Dirichlet et observation de Neumann.

- **Unicité et stabilité Lipschitzienne** pour le problème inverse consistant à déterminer le coefficient de potentiel dans une équation de Schrödinger avec conditions aux limites de Neumann et observation de Dirichlet.

- **Unicité et stabilité Lipschitzienne** pour le problème inverse consistant à déterminer les coefficients de potentiel dans un système couplé ondes-Schrödinger avec conditions aux limites de Neumann et observation de Dirichlet.

La thèse est organisée comme suit.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à la description des problèmes inverses, notamment ceux qui sont modélisés par des EDP.

Le deuxième chapitre est destiné à montrer l'utilité des inégalités de Carleman dans la résolution des problèmes inverses pour des EDP. Nous présentons les inégalités de Carleman pour l'équation des ondes ainsi que pour l'équation de Schrödinger, dont nous aurons besoin pour étudier certains problèmes inverses.

Le chapitre trois est consacré à l'étude d'un problème inverse pour un système d'équations d'ondes couplées dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec conditions aux limites de Dirichlet non homogènes. Nous présentons des résultats d'unicité et de stabilité Lipschitzienne pour la reconstruction de deux coefficients de potentiel inconnus avec une observation de Neumann dépendante du temps

Le chapitre quatre traite le problème inverse de la récupération du coefficient de potentiel inconnu pour une équation de Schrödinger dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec donnée de Neumann non homogène à partir d'une mesure aux limites de Dirichlet dépendante du temps. Nous présentons des résultats d'unicité et de stabilité Lipschitzienne pour ce problème inverse.

Dans le chapitre cinq, on s'intéresse à l'étude d'un problème inverse pour un système couplé ondes-Schrödinger dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec deux coefficients de potentiel inconnus dépendants uniquement de la variable d'espace et des données de type Neumann non homogènes sur le bord. On démontre à l'aide d'une inégalité de Carleman des résultats d'unicité et de stabilité Lipschitzienne pour la détermination des coefficients de potentiel à partir d'une mesure aux limites de Dirichlet dépendante du temps.

On termine la thèse par une conclusion avec des perspectives par rapport au sujet abordé.

# Chapitre 1

# Présentation générale des problèmes inverses

**Résumé**

Nous donnons quelques rappels sur les problèmes inverses. Nous décrivons des problèmes inverses pour des équations aux dérivées partielles, qui représentent notre étude dans cette thèse.

## 1.1 Problèmes directs, problèmes inverses

D'après J.B. Keller [34], deux problèmes sont dits inverses si la formulation de l'un inclut l'autre. Cette définition est en partie arbitraire, et fait jouer un rôle symétrique aux deux problèmes considérés. La définition plus pratique est que le problème inverse consiste à identifier les causes à partir de la connaissance des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse du problème dit direct, qui consiste à déduire des effets dont les causes sont connues. La difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle nécessite souvent une bonne connaissance du problème direct, ce qui conduit à l'utilisation d'une variété de notions, à la fois physiques et mathématiques.

Dans la modélisation d'un phénomène à l'aide d'équations aux dérivées partielles (EDP), les paramètres physiques/ mécaniques/ biologiques qui interviennent ne sont pas nécessairement bien connus. Or la résolution de ces équations, qui est l'objet du problème direct, ne peut se faire que si toutes les données du système sont identifiées (conditions initiales et aux limites, coefficients intervenant dans les équations, domaine spatial...). Si ce n'est pas le cas, des informations supplémentaires, via des mesures expérimentales par exemple, sont alors nécessaires à leur détermination. La notion mathématique de problème inverse consiste en la possibilité de retrouver la valeur d'un paramètre à partir de mesures partielles (localisées, pendant un temps donné, éventuellement répétées) sur la solution du système considéré.

Nous allons maintenant expliquer, à travers un exemple type, ce qu'est un problème direct, un problème inverse ainsi que les difficultés liées à la résolution d'un problème inverse.

Supposons qu'il existe un phénomène réel pour que l'étude mathématique de ce phénomène soit représentée par le modèle suivant

$$Y_M(t) = Y_M(t, V, f(t), Y_0), \tag{1.1.1}$$

où $V$ représente le nombre de paramètres, $f(t)$ représente le terme source, et $Y_0$ représente l'état initial du phénomène. Pour $t \in [t_0; T]$ l'intervalle de temps pendant lequel le système est observé, nous pouvons dire que

- Connaissant $V, f, Y_0$, le calcul de $Y_M(t)$ à l'instant $t \in [t_0, T]$ est un problème direct.

- Connaissant $Y_M$, $f, Y_0$, le calcul de $V$ est un problème inverse d'identifications de paramètres.

- Connaissant $Y_M, V, Y_0$, le calcul de $f$ est un problème inverse de détermination le terme source.

- Connaissant $Y_M, V, f$, le calcul de $Y_0$ est un problème inverse de détermination l'état initial.

Donc la résolution de l'équation (1.1.1) désigne la résolution du problème direct, tandis que le problème inverse consiste à déterminer, à partir du modèle $M$ , une partie de $X = (V, f(t), Y_0)$, notée $X_p$, il est notée par l'équation

$$X_p = F^{-1}(Y) \tag{1.1.2}$$

Problème direct

$$X \text{ Connu} \Rrightarrow \text{Modèle } \Rrightarrow Y_M(t, X)$$

Problème inverse

$$X \Lleftarrow \text{Modèle} \Lleftarrow Y(t) \text{ mesuré}$$

**Figure 1.1 principe de problème direct et inverse.**

## 1.2 Problèmes bien posé et problèmes mal posé.

Dés 1923, Hadamard (Mathématicien Français 1865/1963) a introduit dans son livre la notion du problème bien posé. Il s'agissait de reconstruire la solution du problème de Cauchy à partir de la condition initiale.

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\partial\Omega$ sa frontière.

**Définition 1.2.1** *Soit $P$ un opérateur différentiel, et $B$ l'opérateur frontière. Le problème*

$$\begin{cases} Pu = f & \text{dans } \Omega \times [0, \infty[\,, \\ Bu = g & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[\,, \\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

*est dit bien posé au sens de Hadamard lorsque les trois conditions suivantes sont satisfaites : la solution existe, elle est unique et est stable, c'est à dire elle dépend continûment des données. Où $f$, $g$, et $u_0$ appartiennent à différentes classes de Hilbert.*

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit mal posé. C'est à dire, un "problème mal posé" est un problème qui soit n'a pas de solutions dans la classe souhaitée, soit a plusieurs solutions (deux ou plus), soit la procédure de résolution est instable (c'est-à-dire, des erreurs arbitrairement petites dans les données de mesure peuvent conduire à des erreurs indéfiniment grandes dans les solutions). La plupart des difficultés à résoudre des problèmes mal posés sont causées par l'instabilité de la solution. Par conséquent, le terme ≪ problèmes mal posés ≫ est souvent utilisé pour les problèmes instables.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé. En pratique, les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions. En 1943, A. N. Tikhonov a souligné l'importance pratique de tels problèmes et la possibilité de leur trouver des solutions stables. À la fin des années 1950 et surtout au début des années 1960, une série de nouvelles approches sont apparues qui sont devenues fondamentales pour la théorie des problèmes inverses et mal posés et ont attiré l'attention de nombreux mathématiciens sur cette théorie. De nos jours, la théorie des problèmes inverses et mal posés est devenue un nouveau domaine scientifique puissant et dynamique qui a un impact sur presque tous les domaines des mathématiques, y compris l'algèbre, le calcul, la géométrie, les équations différentielles, la physique mathématique, la théorie fonctionnelle. analyse, mathématiques computationnelles, etc. Pour des

exemples de problèmes inverses mal posés (voir [33]).

## 1.3 Problèmes inverses gouvernés par des EDP

Soit $A$ un opérateur différentiel, et $B$ l'opérateur frontière. Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f & \text{dans } \Omega \times [0, \infty[\,, \\ Bu = g & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[\,, \\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Dans les problèmes directs, on s'intéresse aux solutions $u : (x,t) \in Q \mapsto u(x,t) \in X$ du problème (1.3.1) .

Dans les problèmes inverses, a partir d'une connaissance partielle de la solution $u$ de l'EDP (mesures internes, frontière, fonctionnelle), on s'intéresse à :

- Identification de sources $f$.

- Identification de données initiales $u_0$.

- Identification de données aux limites $g$.

- Identification de coefficients $A$.

- Identification de $\Omega$.

Parce que notre travail dans cette thèse est lié à l'équation d'ondes ainsi qu'à l'équation de Schrödinger, nous expliquons la signification du problème inverse pour ces deux équations.

On formule le problème comme suit : Etant donné un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, on s'intéresse au problème aux limites pour une équation hyperbolique de second ordre

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - \operatorname{div}(a(x)\nabla y(x,t)) + q(x)\, y(x,t) = f(x,t) & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ y(x,t) = h(x,t) & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

ou le problème aux limites pour une équation Schrödinger

$$\begin{cases} iy_t(x,t) + \operatorname{div}(a(x)\nabla y(x,t)) + q(x)\, y(x,t) = f(x,t) & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ y(x,t) = h(x,t) & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{dans } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

où $a$ est le coefficient de diffusion, $q$ le potentiel et $f$ le terme source de l'équation. Dans les problèmes inverses, nous supposons que certains de ces coefficients sont inconnus dans le modèle. D'autre part, nous avons des données sur la solution, appelées observations de la solution. Dans la suite, on notera $R \subset \overline{\Omega} \times [0,T]$ la région d'observation de la solution. La problématique s'énonce alors ainsi.

**A partir de la connaissance de $y$ sur $R$, peut-on déterminer avec précision chacun des coefficients inconnus du modèle, séparément ou simultanément ?**

Nous allons par la suite expliciter ce que l'on entend par détermination précise des coefficients inconnus. On considère l'exemple où $a$ et $q$ sont connus, et l'on cherche à déterminer le terme source $f$. Cet exemple est fondamental, dans la mesure où la résolution de problèmes inverses pour les autres coefficients $a$ et $q$ se ramène au cas d'un terme source (voir [36]). On définit alors l'application suivante, associée au problème direct (1.3.2) ou (1.3.3)

$$J : f \longmapsto u|_R$$

Pour un certain ensemble $F$ de termes sources inconnus, on s'intéresse aux notions suivantes :

1- injectivité de $J$ dans $F$ c'est-à-dire, a-t-on $u_1|_R = u_2|_R$ implique que $f_1 = f_2$, l'injectivité de $J$ se traduit par **l'unicité** pour le problème inverse.

2- continuité de $J^{-1}$ c'est-à-dire, peut-on comparer $\|f_1 - f_2\|$ à $\|u_1|_R - u_2|_R\|$, ce point est appelé **stabilité** pour le problème inverse. Les normes ci-dessus sont à préciser en fonction des équations étudiées et des observations choisies.

3- calcul de $J^{-1}$ ce point fait appel à des **résolutions numériques** du problème inverse qui ne font pas l'objet de cette thèse.

# Chapitre 2

# Inégalités de Carleman

**Résumé**

Dans ce chapitre, nous donnons l'importance des estimations de Carleman dans la résolution de problèmes inverses, en particulier ceux qui sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Nous donneons également une estimation de Carleman pour une équation hyperbolique, ainsi qu'une estimation de Carleman pour une équation de Schrödinger, qui jouent un rôle clé dans la preuve des théorèmes d'unicité et de stabilité pour les problèmes inverses étudiés dans cette thèse.

## 2.1 Introduction

En 1939, T. Carleman introduisit des inégalités d'énergie à poids exponentiels dans le but de démontrer un résultat d'unicité pour des équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques à coefficients réguliers en deux dimensions [12]. Ce type d'inégalités que l'on nomme inégalités de Carleman, a été généralisé et systématisé par L. Hörmander et d'autres auteurs pour de larges classes d'opérateurs différentiels en dimension quelconque (voir [25, 26, 76]). Depuis, l'utilisation de ces inégalités a largement dépassé leur application originale. Elles donnent non seulement des résultats quantitatifs de prolongement unique mais elles sont aussi utilisées pour l'étude de problèmes inverses ainsi qu'en théorie du contrôle pour les EDP.

Nous présentons maintenant la forme générale de l'inégalité de Carleman.

On considère l'opérateur différentiel linéaire $P(x,D)$ sur $\mathbb{R}^n$ d'ordre $m$

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,D_x^\alpha,$$

où $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)$, $|\alpha|=\sum_{i=1}^n \alpha_i$, $D_x^\alpha f=\partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_n}^{\alpha_n} f$.

Notons par $p(x,\xi)=\sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$, et $p_m(x,\xi)=\sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$. où $\xi$ la variable de Fourier.
Soit $\Omega$ un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi\in C^2(\Omega)$ une fonction réelle, $x_0\in\Omega$ et $\Xi$ est une hypersurface orientée définie par

$$\Xi=\{x\in\Omega,\ \varphi(x)=\varphi(x_0)\}\ \text{ avec } \nabla\varphi\neq 0 \text{ sur } \Xi.$$

**Définition 2.1.1** *([25]). Soit $\varphi\in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R})$. On dit que la fonction $\varphi$ est pseudo-convexe en $x\in\overline{\Omega}$ par rapport à $P$ si $\grave{\varphi}(x)\neq 0$,et pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, l'implication suivante est satisfaite*

$$p_m(x,\xi)=0 \ \textit{et}\ \{p_m,\varphi\}(x,\xi)=0\Longrightarrow \mathrm{Re}\,\{\bar{p}_m,\{p_m,\varphi\}\}(x,\xi)>0,$$

*où $\{\ ,\}$ désigne le crochet de Poisson :*

$$\{\ f,g\}=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial\xi_j}\right).$$

**Définition 2.1.2** *([25]). Soit $\varphi\in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R})$. On dit que la fonction $\varphi$ est fortement pseudo-convexe en $x\in\overline{\Omega}$ par rapport à $P$ si*

*1- $\varphi$ est pseudo-convexe en $x\in\overline{\Omega}$ par rapport à $P$*

*2- pour tout $\eta=\xi+i\tau\nabla\varphi,\xi\in\mathbb{R}^n,\tau\neq 0$, l'implication suivante est satisfaite*

$$p_m(x,\eta)=0 \ \textit{et}\ \{p_m,\varphi\}(x,\eta)=0\Longrightarrow\frac{1}{\tau}\,\mathrm{Im}\,\{\bar{p}_m(x,\eta),p_m(x,\eta)\}>0.$$

Pour un opérateur différentiel $P(x,D)$ d'ordre $m$, la forme générale d'une inégalité de Carleman est donnée

par [26].

**Théorème 2.1.1** *([26]) Soient $\Omega$ un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sa frontière supposée régulière. et $\varphi$ une fonction fortement pseudo-convexe par rapport à $P$. Alors, il existe des constantes $C > 0$, $\tau_0 > 0$ telles que pour toutes fonctions $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ et tout $\tau > \tau_0$, l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \tau^{2(m-|\alpha|)-1} \left\| e^{\tau\varphi} D^{\alpha} u \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| e^{\tau\varphi} P u \right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.1.1}$$

**Remarque 2.1.1** *Dans l'inégalité* (2.1.1)*, $\varphi$ est une fonction appelée fonction poids, et $\tau > 0$ un paramètre réel, supposé assez grand. Ces inégalités peuvent être de natures différentes (locales ou globales). Notons qu'une des difficultés principales pour montrer des inégalités globales est la construction de la fonction poids globale. Les inégalités locales peuvent toutefois être recollées (voir par exemple le livre de Hormander [25] ou la revue [47].*

Historiquement, la méthode des estimations de Carleman a été introduite dans le domaine des problèmes inverses par Bukhgeim et Klibanov dans la référence [8], et Klibanov dans ([37, 36]). Les applications de ce type d'inégalités sont multiples. L'utilisation majeure de ces inégalités se fait dans la démonstration des résultats d'unicité et d'inégalités de stabilité dans les problèmes inverses. Dans [36], les inégalités de Carleman ont été appliquées à plusieurs types d'équations pour l'unicité de problème inverse. Elles ont aussi été utilisées dans [42] pour la résolution numérique d'une classe de problèmes inverses qui consiste à déterminer les coefficients de certaines équations aux dérivées partielles à partir des mesures frontières de la solution ou d'une fonction de la solution. Par ailleurs, Isakov [31] à utilisé des inégalités de Carleman pour démontrer l'unicité de la solution de certains problèmes inverses pour certaines classes des EDP, Voir aussi [14, 40, 5, 30].

## 2.2 Inégalités de Carleman et hypothèses principales

Dans ce paragraphe, nous présentons les estimations de Carleman pour une équation hyperbolique (voir [45]) ainsi que pour l'équation de Schrödinger (voir [46]). Ces estimations principales sont les clés des démonstrations des résultats principaux de cette thèse.

Soit $T > 0$ et Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe $C^2$. Tout au long de cette thèse, nous utilisons les notations suivantes :

$Q = \Omega \times [0, T]$,

$\Gamma = \partial\Omega = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1}$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, $\Gamma_0$ (la partie non contrôlée ou non observée) et $\Gamma_1$ (la partie contrôlée ou observée).

$\Sigma = \Gamma \times [0, T]$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times [0, T]$,

$\nabla v = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, ....., \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)$, $\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$,

$\nu = [\nu_1, \cdots, \nu_n]$ représente le vecteur normal unitaire sur $\Gamma$ orienté vers l'extérieur.

$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v.\nu$ la dérivée normale.

Comme dans [45, 46, 69, 68], et ([67], paragraphe 5), nous faisons les hypothèses suivantes

**Hypothèses** $H$**.** Il existe une fonction strictement convexe (à valeurs réelles) non négative $d : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $C^3\left(\overline{\Omega}\right)$, telle que

$(H_i)$

$$\frac{\partial d}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_0} = \nabla d.\nu = h.\nu = 0, \text{ où } h = \nabla d. \tag{2.2.1}$$

$(H_{ii})$ La matrice Hessienne (symétrique) $H_d$ de $d(.)$ est strictement définie positive sur $\overline{\Omega}$, il existe une constante $\rho > 0$, telle que pour tout $x \in \overline{\Omega}$

$$H_d(x) = J_h(x) \geq \rho I. \tag{2.2.2}$$

$(H_{iii})$ $d(.)$ n'a pas de point critique sur $\overline{\Omega}$

$$\inf_{x\in\Omega} |h(x)| = \inf_{x\in\Omega} |\nabla d(x)| = s > 0. \tag{2.2.3}$$

$(H_{iv})$

$$\frac{\partial d}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_0} = \nabla d.\nu = h.\nu \leq 0, \text{ où } h = \nabla d. \tag{2.2.4}$$

**Fonction pseudo-convexe** ( [45, 46]). Après le choix de la fonction strictement convexe $d(.)$ satisfaisant les hypothèses $(H_{ii})$, et $(H_{iii})$ et $d(x) \geq \min_{x\in\overline{\Omega}} d(x) = m > 0$ , nous introduisons la fonction pseudo-convexe $\varphi(.,.)$ définie par

$$\varphi(x,t) = d(x) - c\left(t - \frac{T}{2}\right)^2, \quad (x,t) \in Q, \tag{2.2.5}$$

pour $T > T_0 \equiv 2\sqrt{\max_{x\in\overline{\Omega}} d(x)}$, et $c$ sélectionnée comme suit. Soit $\delta > 0$ telle que

$$T^2 > 4\max_{x\in\overline{\Omega}} d(x) + 4\delta, \tag{2.2.6}$$

Pour ce $\delta > 0$, il existe une constante $c$, $0 < c < 1$, telle que

$$cT^2 > 4\max_{x\in\overline{\Omega}} d(x) + 4\delta. \tag{2.2.7}$$

Cette fonction $\varphi(.,.)$ a les propriétés suivantes

- Pour la constante $\delta > 0$ fixée dans (2.2.6), (2.2.7) et pour tout $t > 0$

$$\varphi(x,t) \leq \varphi\left(x, \frac{T}{2}\right) \quad \text{pour tout } (x,t) \in Q, \tag{2.2.8}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi(x,T) = d(x) - c\frac{T^2}{4} \leq \max_{x\in\overline{\Omega}} d(x) - c\frac{T^2}{4} \leq -\delta \quad \text{uniformément dans } x \in \Omega. \tag{2.2.9}$$

- Il existe $t_0$ et $t_1$, avec $0 < t_0 < \frac{T}{2} < t_1 < T$ , tels que pour tout $x \in \Omega$

$$\min_{x\in\overline{\Omega},\ t\in[t_0,t_1]} \varphi(x,t) \geq \sigma > 0, \quad \text{où } 0 < \sigma < m = \min d(x). \tag{2.2.10}$$

Par (2.2.5) on a $\varphi\left(x, \frac{T}{2}\right) = d(x) \geq m > 0$ pour tout $x \in \Omega$.

De plus, on définit le sous-ensemble $Q(\sigma)$ de $Q$ par

$$Q(\sigma) = \{(x,t), x \in \Omega,\ 0 \leq t \leq T,\ \varphi(x,t) \geq \sigma > 0\}. \tag{2.2.11}$$

Une propriété de $Q(\sigma)$ est

$$\Omega \times [t_0, t_1] \subset Q(\sigma) \subset Q. \tag{2.2.12}$$

### 2.2.1 Estimation de Carleman au niveau $H^1 \times L^2$ pour l'équation des ondes

Nous considérons l'équation des ondes

$$y_{tt}(x,t) - \Delta y(x,t) = F(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.2.13}$$

avec $F \in L^2(Q) \equiv L^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$. Dans un premier temps sans imposer de conditions aux limites, nous considérons d'abord la solution $y$ de (2.2.13) dans la classe

$$y \in H^{2,2}(Q) \equiv L^2\left(0,T,H^2(\Omega)\right) \cap H^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right). \tag{2.2.14}$$

Nous avons l'estimation de Carleman suivante.

**Théorème 2.2.1** *([45], p. 255). Nous supposons que les hypothèses $(H_{ii})$, et $(H_{iii})$ sont vérifiées. Soit $\varphi(.,.)$ défini comme dans (2.2.5). Soit $y \in H^{2,2}(Q)$ une solution de l'équation (2.2.13) où $F \in L^2(Q)$. Alors la famille d'estimations à un paramètre suivante est vraie*

$$\begin{aligned} &BT|_\Sigma(y) + 2\int_Q e^{2\tau\varphi}|F|^2 dQ + C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q y^2 dQ \\ &\geq C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[y_t^2 + |\nabla y|^2\right] dQ + C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} y^2 dxdt - c_T\tau^3 e^{-2\tau\delta}\left[E_y(0) + E_y(T)\right], \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

*pour tout* $\tau > 0$ *suffisamment grand, où*

$$C_{1,\tau} = \tau\epsilon\rho, \quad C_{2,\tau} = 2\tau^3\beta + \grave{O}\left(\tau^2\right). \tag{2.2.16}$$

*avec* $\rho > 0$, $\beta > 0$, *et* $\epsilon > 0$ *petit. Ici* $c_T$ *et* $C_{1,T}$ *sont des constantes positives dépendants de* $T$, *mais pas de* $\tau$. *De plus, les termes frontières* $BT|_\Sigma(y)$ *sont données par*

$$\begin{aligned} BT|_\Sigma(y) = {} & 2\tau\int_0^T\int_{\Gamma_1} e^{2\tau\varphi}\left[y_t^2 - |\nabla y|^2\right] h.\nu d\Gamma dt + 8c\tau\int_0^T\int_\Gamma e^{2\tau\varphi}\left(t-\frac{T}{2}\right) y_t\frac{\partial y}{\partial\nu}d\Gamma dt \\ & + 4\tau\int_0^T\int_\Gamma e^{2\tau\varphi}\left(h.\nabla y\right)\frac{\partial y}{\partial\nu}d\Gamma dt \\ & + 4\tau^2\int_0^T\int_\Gamma e^{2\tau\varphi}\left[\left|h^2\right| - 4c^2\left(t-\frac{T}{2}\right)^2 + \frac{\alpha}{2\tau}\right] y\frac{\partial y}{\partial\nu}d\Gamma dt \\ & + 2\tau\int_0^T\int_{\Gamma_1} e^{2\tau\varphi}\left[2\tau^2\left(\left|h^2\right| - 4c^2\left(t-\frac{T}{2}\right)^2\right) + \tau\left(\alpha - \Delta d - 2c\right)\right] y^2 h.\nu d\Gamma dt, \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

*où* $\alpha(x) = \Delta d(x) - 2c - 1 + k$ *pour* $0 < k < 1$ *une constante. De plus, la fonction d'énergie* $E_y$ *est définie par*

$$E_y(t) = \int_\Omega \left[y^2(x,t) + y_t^2(x,t) + |\nabla y(x,t)|^2\right] d\Omega. \tag{2.2.18}$$

*avec*

$$|\nabla y|^2 = \left|\frac{\partial y}{\partial\nu}\right|^2 + |\nabla_{\tan} y|^2$$

Dans le théorème suivant, nous étendrons l'estimation de Carleman (2.2.15) aux solutions d'énergie finie de l'équation (2.2.13) dans la classe suivante

$$\begin{gathered} y \in H^{1.1}(Q) \equiv L^2\left(0,T,H^1(\Omega)\right) \cap H^1\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \\ y_t \in L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right), \frac{\partial y}{\partial\nu} \in L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right). \end{gathered} \tag{2.2.19}$$

**Théorème 2.2.2** *( [45], théorème 8.2, p. 266). Supposons* $F \in L^2(Q)$. *Soit* $y \in H^{2.2}(Q)$ *une solution de* (2.2.13) *pour laquelle l'inégalité* (2.2.15) *est vraie, du moins comme le garantit le théorème 2.2.1. Soit* $y$ *une solution de* (2.2.13) *dans la classe définie par* (2.2.19). *Alors, l'estimation* (2.2.15) *est également satisfaite par une telle solution* $y$.

### 2.2.2 Estimation de Carleman au niveau $H^1$ pour l'équation de Schrödinger

Nous considérons l'équation de Schrödinger

$$iz_t(x,t) + \Delta z(x,t) = q(x)\, z(x,t) + F(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.2.20}$$

avec $q \in L^\infty(\Omega)$, $F \in L^2(Q) \equiv L^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$

Nous considérons d'abord la solution $z$ de (2.2.20) sans imposer de conditions aux limites. Ils seront pris

dans un premier temps dans la classe suivante

$$\begin{aligned} z &\in H^{2.2}(Q) \equiv L^2\left(0,T,H^2(\Omega)\right) \cap H^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} &\in L^2\left(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right), z_t \in L^2\left(0,T,H^1(\Omega)\right),\ z_t \in L^2\left(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right). \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Nous avons l'estimation de Carleman suivante

**Théorème 2.2.3** *([46], théorème 5.1, p. 74). Supposons les propriétés de régularité $F \in L^2(Q)$ ainsi que les hypothèses $(H_{ii})$, et $(H_{iii})$. Soit $z$ une solution de (2.2.20) dans la classe (2.2.21). Alors la famille d'estimations à un paramètre suivante est vraie, pour tout $\tau > 0$ suffisamment grand*

$$\begin{aligned} B|_{\Sigma}(z) + 4\int_Q e^{2\tau\varphi}|F|^2 dQ \geq \widetilde{C}_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|\nabla z|^2\right] dQ \\ + \widetilde{C}_{2,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}|z|^2 dQ - C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_z(0) + E_z(T)\right], \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

*où*

$$\widetilde{C}_{1,\tau} = \delta_0\left(2\tau\rho - \frac{1}{2}\right) - 4C_T,\ \widetilde{C}_{2,\tau} = 4\tau^3\rho s^2(1-\delta_0) + \grave{O}\left(\tau^2\right) - 4C_T, \tag{2.2.23}$$

*si $q(x)z(x,t) \equiv 0$, alors*

$$\widetilde{C}_{1,\tau} = \delta_0\left(2\tau\rho - \frac{1}{2}\right),\ \widetilde{C}_{2,\tau} = 4\tau^3\rho s^2(1-\delta_0) + \grave{O}\left(\tau^2\right), \tag{2.2.24}$$

*ici $0 < \delta_0 < 1$ est un nombre fixe, tandis que $C_{d,T}$ est une constante positive dépendant de $d(x)$ et $T$. De plus les termes frontières $BT|_{\Sigma}(z)$, sont donnés explicitement comme suit*

$$\begin{aligned} B|_{\Sigma}(z) = 2\tau\int_0^T\int_{\Gamma_1} e^{2\tau\varphi}\left[2\tau^2|h|^2 + \Phi\right]|z|^2 h.\nu d\Gamma dt \\ - 4c\tau\int_0^T\int_{\Gamma} e^{2\tau\varphi}\left(t - \frac{T}{2}\right)\left[\eta\frac{\partial\xi}{\partial\nu} - \xi\frac{\partial\eta}{\partial\nu}\right] d\Gamma dt \\ - 2\tau\int_0^T\int_{\Gamma_1} e^{2\tau\varphi}\left[\xi_t\eta - \xi\eta_t\right] h.\nu d\Gamma dt \\ + \int_0^T\int_{\Gamma} e^{2\tau\varphi}\left[2\tau^2|h|^2 - \Phi\right]\left[\overline{z}\frac{\partial z}{\partial\nu} + z\frac{\partial\overline{z}}{\partial\nu}\right] h.\nu d\Gamma dt \\ + 2\tau\int_0^T\int_{\Gamma} e^{2\tau\varphi} h\left[\nabla\overline{z}\frac{\partial z}{\partial\nu} + \nabla z\frac{\partial\overline{z}}{\partial\nu}\right] h.\nu d\Gamma dt \\ - 2\tau\int_0^T\int_{\Gamma_1} e^{2\tau\varphi}|\nabla z|^2 h.\nu d\Gamma dt, \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

*où $\xi = \mathrm{Re}(z)$, $\eta = \mathrm{Im}(z)$, tandis que la fonction $\Phi$ peut être prise pour satisfaire : soit $\Phi \equiv 0$, ou sinon $\Phi = \tau\Delta d(x)$. De plus, la fonction d'énergie $E_z$ est définie par*

$$E_z(t) = \int_{\Omega}\left[|\nabla z(x,t)|^2 + |z(x,t)|^2\right] d\Omega. \tag{2.2.26}$$

*et*

$$|\nabla z|^2 = \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 + |\nabla_{\tan} z|^2$$

Pour ce qui suit, il est utile de rappeler l'extension suivante de l'estimation de Carleman (2.2.22) aux solutions d'énergie finies. Pour cela, nous introduisons la classe de solutions suivante pour (2.2.20)

$$z \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \frac{\partial z}{\partial \nu}, z_t \in L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right). \tag{2.2.27}$$

**Théorème 2.2.4** *([46], théorème 7.3.1, p. 92). En référence à* (2.2.20)*, soit* $F \in L^2\left(0,T,H^1(\Omega)\right)$*, ainsi que les hypothèses* $(H_{ii})$*, et* $(H_{iii})$*. Alors, l'estimation de Carleman* (2.2.22) *est également vraie pour une solution de* (2.2.20)*, dans la classe* (2.2.27)*.*

**Remarque 2.2.1** *Pour étendre le théorème 2.2.1 (théorème 2.2.3) à l'équation* (2.2.13) *((*2.2.20*)) avec les conditions aux limites de Neumann (Dirichlet), nous imposons en plus l'hypothèse* $(H_i)$ *((*$H_{iv}$*)).*

# Chapitre 3

# Problème inverse pour un système couplé ondes-ondes

**Résumé**

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème inverse de la récupération des coefficients de potentiel inconnus dans un système couplé ondes-ondes avec conditions aux limites de Dirichlet non homogènes, à partir d'une observation de Neumann dépendante du temps. Pour ce faire, on utilise une inégalité de Carleman pour l'équation des ondes.

## 3.1 Introduction

Il existe une large littérature traitant des problèmes inverses pour les équations hyperboliques, voir par exemple [21, 39, 31, 5] et leur bibliographie. Des problèmes inverses pour des équations hyperboliques du second ordre multidimensionnelles ont été étudiés dans [58, 29, 71, 32, 53, 52].

Dans [58], les auteurs ont établi la stabilité Lipschitzienne pour le problème inverse de la détermination du terme source à partir de la donnée de la condition de Neumann. La stabilité Lipschitzienne a été aussi établie dans [29] pour le problème inverse de la détermination du coefficient de potentiel à partir de la donnée de la solution sur un sous-domaine du domaine. Yamamoto [71] a utilisé les inégalités de Carleman et une inégalité d'observabilité pour établir l'unicité et la stabilité du problème inverse de recouvrement du coefficient de potentiel à partir d'une observation de Neumann. La méthode des multiplicateurs a été adaptée dans [32] pour étudier la stabilité du problème inverse de détermination du terme source à partir d'une observation partielle de Dirichlet. Liu et Triggiani [53] ont étudiè le problème inverse de la détermination du coefficient d'amortissement par le moyen d'une mesure de Dirichlet sous des conditions géométriques sur le domaine spatial. Ils sont montré des résultats d'unicité et de stabilité. Leur démonstration est basée sur les inégalités de Carleman pour les équations hyperboliques et l'inégalité d'observabilité correspondante. La même approche a été adaptée dans [52] pour étudiér le problème inverse de la détermination des coefficients du potentiel et d'amortissement au moyen d'une mesure partielle de Dirichlet.

Des travaux sur des problèmes inverses pour des systèmes hyperboliques couplés ont été aussi réalisés, voir par exemple [55] et [19].

Liu et Triggiani ont adaptée la méthode qu'ils ont développée dans [55] pour étudier le problème inverse du recouvrement des deux coefficients d'amortissement par le moyen des traces de Dirichlet des deux solutions sur une partie appropriée de la frontière. Dans [19], Dou et Yamamoto ont considéré le problème inverse d'identification des coefficients des termes d'ordre zéro à partir de l'observation sur un sous-domaine d'une composante de la solution. En utilisant les estimations de Carleman pour les équations d'ondes couplées, un résultat de stabilité de type logarithmique est obtenu en supposant que les coefficients sont donnés dans un voisinage d'une partie de la frontière.

Ce chapitre étudie le problème inverse de la détermination des deux coefficients du potentiel pour un système de deux équations d'ondes couplées avec des conditions aux limites de Dirichlet à partir d'une observation partielle de Neumann des deux solutions. A notre connaissance ce problème n'a pas été considéré dans la littérature.

## 3.2 Énoncé du problème

On considère le système couplé ondes-ondes suivant

$$w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) = q(x) z(x,t) \qquad \text{dans } Q, \tag{3.2.1a}$$

$$z_{tt}(x,t) - \Delta z(x,t) = p(x) w(x,t) \qquad \text{dans } Q, \tag{3.2.1b}$$

$$w(x, \frac{T}{2}) = w_0(x), w_t(x, \frac{T}{2}) = w_1(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.2.1c}$$

$$z(x, \frac{T}{2}) = z_0(x),\ z_t(x, \frac{T}{2}) = z_1(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.2.1d}$$

$$w(x,t) = g_1(x,t), z(x,t) = g_2(x,t) \qquad \text{sur } \Sigma. \tag{3.2.1e}$$

Le système (3.2.1$a$)-(3.2.1$e$) est un modèle simplifié pour décrire l'interaction des ondes (par exemple, pour décrire la dynamique de couches atomiques quasi-bidimensionnel adsorbées sur des surfaces métalliques [7], ou pour modéliser la dynamique de torsion de l'ADN [10]).

Ici les conditions initiales $w_0(x), w_1(x), z_0(x), z_1(x)$ et les conditions aux limites de Neumann $g_1(x,t), g_2(x,t)$ sont données, alors que, les potentiels $q$, $p$ sont des coefficients inconnus indépendants du temps.

Nous considérons le problème inverse de la détermination des coefficients $q$, et $p$ pour le système couplé (3.2.1$a$)-(3.2.1$e$) à partir d'une observation dépendante du temps des données de Neumann $\frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ sur la frontière. Cela signifie que nous prouverons l'unicité et la stabilité du problème inverse non linéaire caractérisé par l'application non linéaire

$$\{q,p\}|_\Omega \to \left\{ \frac{\partial w}{\partial \nu}, \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\}\Big|_\Sigma .$$

Dans ce chapitre, nous traitons deux types de problèmes inverses qui peuvent être énoncés comme suit.

**Problème inverse non linéaire.** Nous répondrons plus précisément aux questions suivantes

**Unicité dans le problème inverse non linéaire**

Soit $\{w = w(q,p), z = z(q,p)\}$ la solution du $\{w,z\}$-système (3.2.1$a$)-(3.2.1$e$). Sous les hypothèses $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, et $(H_{iv})$, l'implication suivante est elle vraie

$$\begin{cases} \frac{\partial w(q_1,p_1)}{\partial \nu}|_{\Sigma_1} = \frac{\partial w(q_2,p_2)}{\partial \nu}|_{\Sigma_1} \\ \frac{\partial z(q_1,p_1)}{\partial \nu}|_{\Sigma_1} = \frac{\partial z(q_2,p_2)}{\partial \nu}|_{\Sigma_1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 = q_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases} \text{ sur } \Omega \ ?$$

**Stabilité dans le problème inverse non linéaire**

Sous les hypothèses $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, et $(H_{iv})$, est-il possible d'estimer $q_1 - q_2|_\Omega$, $p_1 - p_2|_\Omega$ par $\left( \frac{\partial w(q_1,p_1)}{\partial \nu} - \frac{\partial w(q_2,p_2)}{\partial \nu} \right)|_{\Sigma_1}$ et $\left( \frac{\partial z(q_1,p_1)}{\partial \nu} - \frac{\partial z(q_2,p_2)}{\partial \nu} \right)|_{\Sigma_1}$ dans des normes appropriées ?

En effet, nous ne donnerons qu'une réponse sur la détermination de $p, q$, en travaillant d'abord sur une version linéaire du problème.

**Problème inverse linéaire correspondant.** Le problème inverse non linéaire est converti en un problème

inverse linéaire. Soit

$$\begin{aligned} &f(x) = q_1(x) - q_2(x), \qquad g(x) = p_1(x) - p_2(x), \\ &R_1(x,t) = z(q_2,p_2)(x,t), \qquad R_2(x,t) \ = w(q_2,p_2)(x,t), \\ &u(x,t) \ = w(q_1,p_1)(x,t) - w(q_2,p_2)(x,t), \\ &\upsilon(x,t) = z(q_1,p_1)(x,t) - z(q_2,p_2)(x,t). \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Alors, après avoir soustrait le $\{w,z\}$-système (3.2.1$a$)-(3.2.1$e$) à coefficients $(q_1,p_1)$ du $\{w,z\}$-système (3.2.1$a$)-(3.2.1$e$) à coefficients $(q_2,p_2)$, on obtient le système suivant

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = q(x)\,\upsilon(x,t) + f(x)R_1(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.2.3a}$$

$$\upsilon_{tt}(x,t) - \Delta\upsilon(x,t) = p(x)u(x,t) + g(x)R_2(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.2.3b}$$

$$u(.,\frac{T}{2}) = 0,\ u_t(.,\frac{T}{2}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.2.3c}$$

$$\upsilon(.,\frac{T}{2}) = 0,\ \upsilon_t(.,\frac{T}{2}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.2.3d}$$

$$u(x,t) = 0,\ \upsilon(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \tag{3.2.3e}$$

(bien sûr, $q$ dans (3.2.3$a$) est en fait $q_1$ dans la notation de (3.2.2), tandis que $p$ dans (3.2.3$b$) est en fait $p_1$ dans la notation de (3.2.2)), où, les termes $f$, $g$ sont des coefficients inconnus indépendants du temps.

Le $\{u,\upsilon\}$-système a l'avantage sur le $\{w,z\}$-système de (3.2.1$a$)-(3.2.1$e$) que l'application

$$\{f,g\}|_\Omega \to \{\frac{\partial u}{\partial\nu},\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\}\Big|_\Sigma$$

est linéaire. De même, dans le problème (3.2.3$a$)-(3.2.3$e$), nous répondrons plus précisément aux questions suivantes

**Unicité dans le problème inverse linéaire**

Soit $\{u = u(f,g), \upsilon = \upsilon(f,g)\}$ la solution du $\{u,\upsilon\}$-système (3.2.3$a$)-(3.2.3$e$). Sous les hypothèses $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, et $(H_{iv})$, l'implication suivante est elle vraie

$$\begin{cases} \frac{\partial u(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1} = 0 \\ \frac{\partial\upsilon(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases} \text{ sur } \Omega \ ?$$

**Stabilité dans le problème inverse linéaire**

Sous les hypothèses $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, et $(H_{iv})$, est-il possible d'estimer $f\,|_\Omega,\ g|_\Omega$ par $\frac{\partial u(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1}$ et $\frac{\partial\upsilon(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1}$ dans des normes appropriées ?

**Remarque 3.2.1** *Dans les $\{w,z\}$-systèmes (3.2.1$a$)-(3.2.1$e$) et (3.2.3$a$)-(3.2.3$e$), on considère $t = \frac{T}{2}$ comme*

*le temps initial. Ce n'est pas essentiel, car le changement de la variable* $t \to t - \frac{T}{2}$ *transforme* $t = \frac{T}{2}$ *en* $t = 0$. *Cependant, ce choix actuel est pratique pour appliquer l'estimation de Carleman établie dans [45] pour l'équation d'ondes, qui utilise la fonction pseudo-convexe* $\varphi(.,.)$ *dans* (2.2.5) *centrée autour de* $\frac{T}{2}$.

Le but de ce chapitre est de donner une réponse affirmative aux questions d'unicité et de stabilité de ci-dessus pour les problèmes inverses linéaires et non linéaires.

## 3.3 Résultats principaux

**Théorème 3.3.1** ***(Unicité du problème inverse linéaire).*** *Nous supposons que les hypothèses* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$, *sont vérifiées. Soit*

$$T > T_0 \equiv 2\sqrt{\max_{x\in\overline{\Omega}} d(x)}. \tag{3.3.1}$$

*Dans le* $\{u, v\}$*-système* (3.2.3*a*)-(3.2.3*e*), *nous supposons*

$$\begin{aligned} &q,\ p \in L^{\infty}(\Omega), \quad f,\ g \in L^{2}(\Omega) \\ &R_i, R_{it}, R_{itt} \in L^{\infty}(Q),\ R_{ix_j}\left(.,\tfrac{T}{2}\right) \in L^{\infty}(\Omega) \quad i = 1,2,\ 1 \leq\ j \leq n, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$$\left|R_1\left(x,\frac{T}{2}\right)\right| \geq r_1 > 0, \quad \left|R_2\left(x,\frac{T}{2}\right)\right| \geq r_2 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.3.3}$$

*avec* $r_1$, $r_2$ *sont des constantes positives. Si la solution* $\{u = u(f,g), v = v(f,g)\}$ *de* $\{u, v\}$*-système* (3.2.3*a*)-(3.2.3*e*) *satisfait*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(f,g)}{\partial \nu}(x,t) = 0 \\ \frac{\partial v(f,g)}{\partial \nu}(x,t) = 0 \end{cases} \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{3.3.4}$$

*alors*

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad x \in \Omega. \tag{3.3.5}$$

**Théorème 3.3.2** ***(Unicité du problème inverse non linéaire).*** *Nous supposons que les hypothèses* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$ *sont vérifiées. Soit* $T$ *comme dans* (3.3.1). *Soient* $\{w(q_1,p_1), z(q_1,p_1)\}$, *et* $\{w(q_2,p_2), z(q_2,p_2)\}$ *les solutions du* $\{w, z\}$*-système* (3.2.1*a*)-(3.2.1*e*) *correspondantes aux coefficients* $(q_1,p_1)$, $(q_2,p_2)$ *respectivement, supposons en plus*

$$q_1, p_1, q_2\ , p_2 \in L^{\infty}(\Omega), \tag{3.3.6}$$

$$w, z, w_t, z_t, w_{tt}, z_{tt} \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right), \tag{3.3.7}$$

$$w_{0x_j}\ , z_{0x_j} \in L^{\infty}(\Omega), \quad 1 \leq\ j \leq n, \tag{3.3.8}$$

$$|w_0(x)| \geq w_0 > 0, \qquad |z_0(x)| \geq z_0\ > 0, \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.3.9}$$

*Si*

$$\begin{cases} \frac{\partial w(q_1,p_1)}{\partial \nu}(x,t) = \frac{\partial w(q_2,p_2)}{\partial \nu}(x,t) \\ \frac{\partial z(q_1,p_1)}{\partial \nu}(x,t) = \frac{\partial z(q_2,p_2)}{\partial \nu}(x,t) \end{cases} \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{3.3.10}$$

*alors, en fait*

$$q_1(x) = q_2(x), \quad p_1(x) = p_2(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.3.11}$$

**Théorème 3.3.3** ***(Stabilité du problème inverse linéaire).*** *Considérons le* $\{u, v\}$*-système* (3.2.3*a*)-(3.2.3*e*)*. On suppose que les hypothèses* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$, (3.3.1), (3.3.2), *et* (3.3.3) *sont vérifiées. Alors il existe une constante* $C = C(\Omega, T, \Gamma_1, \varphi, q, p, R_1, R_2) > 0$*, c'est-à-dire en fonction des données du problème (*3.2.3*a*)-(3.2.3*e*)*, *mais pas sur les coefficients inconnus* $f$ *et* $g$*, telle que*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \leq C\{\left\| \frac{\partial u(f,g)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} + \left\| \frac{\partial v(f,g)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))}\}, \tag{3.3.12}$$

*pour tous* $f, g \in L^2(\Omega)$*.*

**Théorème 3.3.4** ***(Stabilité du problème inverse non linéaire).*** *Nous supposons que les hypothèses* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$ *sont vérifiées. Considérons le* $\{w, z\}$*-système* (3.2.1*a*)-(3.2.1*e*) *sur* $[0, T]$*, avec* $T > T_0$ *comme dans* (3.3.1)*, une fois avec des coefficients de potentiel* $(q_1, p_1) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$*, et une fois avec les coefficients de potentiel* $(q_2, p_2) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$*, et soient* $\{w(q_1, p_1), z(q_1, p_1)\}$, $\{w(q_2, p_2), z(q_2, p_2)\}$ *les solutions correspondantes. Alors il existe une constante* $C = C(\Omega, T, \Gamma_1, \varphi, M, w_0, w_1, z_0, z_1, g_1, g_2) > 0$*, telle que*

$$\begin{aligned} &\|q_1 - q_2\|_{L^2(\Omega)} + \|p_1 - p_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\{\left\| \frac{\partial w(q_1,p_1)}{\partial \nu} - \frac{\partial w(q_2,p_2)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} + \left\| \frac{\partial z(q_1,p_1)}{\partial \nu} - \frac{\partial z(q_2,p_2)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))}\}. \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Les démonstrations des théorèmes énoncés ci-dessus sont basée sur l'estimation de Carleman (2.2.15).

## 3.4 Unicité du problème inverse dans le cas linéaire

**Démonstration du théorème 3.3.1**

**Étape 1**.

**Proposition 3.4.1** *Supposons* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$, (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4)*. Alors la famille à un pa-*

*ramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le* $\{u,\upsilon\}$*-système (*3.2.3$a$)-(3.2.3$e$),

$$\begin{aligned}
&C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_t^2+|\nabla u|^2+\upsilon_t^2+|\nabla\upsilon|^2\right]dQ+C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)}e^{2\tau\varphi}\left[u^2+\upsilon^2\right]dxdt\\
&\leq c_{p,q}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u|^2+|\upsilon|^2\right]dQ+C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[u^2+\upsilon^2\right]dQ+4\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_1|^2+|gR_2|^2\right]dQ\\
&+c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}\left[E_u(0)+E_u(T)+E_\upsilon(0)+E_\upsilon(T)\right], \qquad (3.4.1)
\end{aligned}$$

*pour tout* $\tau>0$ *suffisamment grand, où*

$$c_{p,q}=\max\left\{c_q,c_p\right\}.$$

*Ici* $c_q$, $c_p$, *sont des constantes définies ci-dessous dans* (3.4.5) *et* (3.4.8).

**Preuve de la proposition 3.4.1**

De (3.3.2) , on a la régularité suivante pour le $\{u,\upsilon\}$-système (3.2.3$a$)-(3.2.3$e$)

$$u,\upsilon\in C\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T],L^2(\Omega)\right)\subset H^{1.1}(Q).$$

Revenons à (3.2.3$a$)

$$u_{tt}-\Delta u=q(x)\upsilon+f(x)R_1(x,t). \qquad (3.4.2)$$

Pour s'adapter à (2.2.13), posons

$$F^{(u)}(x,t)=q(x)\upsilon+f(x)R_1(x,t).$$

De (3.3.2) , on a $F^{(u)}\in L^2(Q)$. Par conséquent, le théorème 2.2.2 s'applique à (3.4.2), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&BT|_\Sigma(u)+2\int_Q e^{2\tau\varphi}\left|q(x)\upsilon+f(x)R_1(x,t)\right|^2dQ+C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q u^2dQ\\
&\geq C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_t^2+|\nabla u|^2\right]dQ+C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)}e^{2\tau\varphi}u^2dxdt\\
&-c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}\left[E_u(0)+E_u(T)\right]. \qquad (3.4.3)
\end{aligned}$$

De (3.2.3$e$), (3.3.4) , et car $\nabla u=\frac{\partial u}{\partial\nu}\nu.$ on a, via (2.2.17)

$$\begin{aligned}
BT|_\Sigma(u)&=4\tau\int_0^T\int_\Gamma e^{2\tau\varphi}(h.\nabla u)\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma dt\\
&=4\tau\int_0^T\int_{\Gamma_0}e^{2\tau\varphi}(h.\nabla u)\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0dt+4\tau\int_0^T\int_{\Gamma_1}e^{2\tau\varphi}(h.\nabla u)\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_1dt\\
&=4\tau\int_0^T\int_{\Gamma_0}e^{2\tau\varphi}(h.\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2d\Gamma_0dt. \qquad (3.4.4)
\end{aligned}$$

puisque $q \in L^{\infty}(\Omega)$ par (3.3.2), alors

$$\int_Q e^{2\tau\varphi} \left|q(x)\upsilon + fR_1\right|^2 dQ \leq c_q \int_Q e^{2\tau\varphi} |\upsilon|^2 dQ + 2\int_Q e^{2\tau\varphi} |fR_1|^2 dQ. \tag{3.4.5}$$

Insérions (3.4.4), et (3.4.5) dans (3.4.3) donne, pour tout $\tau$ suffisamment grand

$$\begin{aligned} &C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_t^2 + |\nabla u|^2\right] dQ + C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} u^2 dxdt \\ &\leq c_q \int_Q e^{2\tau\varphi} |\upsilon|^2 dQ + 4\int_Q e^{2\tau\varphi} |fR_1|^2 dQ + C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q u^2 dQ \\ &+ c_T\tau^3 e^{-2\tau\delta}\left[E_u(0) + E_u(T)\right] + 4\tau\int_0^T\int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma_0 dt. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

On suit la même méthode que ci-dessus pour l'équation (3.2.3$b$), on obtient

$$BT|_{\Sigma}(\upsilon) = 4\tau\int_0^T\int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu)\left|\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma_0 dt, \tag{3.4.7}$$

$$e^{2\tau\varphi}\left|p(x)u + gR_2\right|^2 dQ \leq c_p\int_Q e^{2\tau\varphi}|u|^2 dQ + 2\int_Q e^{2\tau\varphi}|gR_2|^2 dQ, \tag{3.4.8}$$

$$\begin{aligned} &C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[\upsilon_t^2 + |\nabla\upsilon|^2\right] dQ + C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\upsilon^2 dxdt \\ &\leq c_p\int_Q e^{2\tau\varphi}|u|^2 dQ + 4\int_Q e^{2\tau\varphi}|gR_2|^2 dQ + C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q \upsilon^2 dQ \\ &+ c_T\tau^3 e^{-2\tau\delta}\left[E_\upsilon(0) + E_\upsilon(T)\right] + 4\tau\int_0^T\int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu)\left|\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma_0 dt. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Combinons les estimations (3.4.6) et (3.4.9), on trouve

$$\begin{aligned} &C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_t^2 + |\nabla u|^2 + \upsilon_t^2 + |\nabla\upsilon|^2\right] dQ + C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u^2 + \upsilon^2\right] dxdt \\ &\leq c_{p,q}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u|^2 + |\upsilon|^2\right] dQ + C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[u^2 + \upsilon^2\right] dQ + 4\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_1|^2 + |gR_2|^2\right] dQ \\ &+ c_T\tau^3 e^{-2\tau\delta}\left[E_u(0) + E_u(T) + E_\upsilon(0) + E_\upsilon(T)\right] + 4\tau\int_0^T\int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu)\left[\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\right|^2\right] d\Gamma_0 dt, \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

car $h.v \leq 0$ sur $\Gamma_0$ par (2.2.4), alors (3.4.10) donne l'estimation souhaitée (3.4.1).

**Étape 2.**

On dérive le $\{u,\upsilon\}$-système (3.2.3$a$)-(3.2.3$e$) par rapport à $t$, on obtient

$$(u_t)_{tt} - \Delta u_t = q(x)(\upsilon_t) + f(x) R_{1t}(x,t) \qquad \text{dans } Q, \tag{3.4.11a}$$

$$(\upsilon_t)_{tt} - \Delta \upsilon_t = p(x)(u_t) + g(x) R_{2t}(x,t) \qquad \text{dans } Q, \tag{3.4.11b}$$

$$(u_t)(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (u_t)_t\left(.,\frac{T}{2}\right) = f(x) R_1\left(.,\frac{T}{2}\right) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.4.11c}$$

$$(\upsilon_t)(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (\upsilon_t)_t\left(.,\frac{T}{2}\right) = g(x) R_2\left(.,\frac{T}{2}\right) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.4.11d}$$

$$(u_t)(x,t) = 0, \ \ (\upsilon_t)(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \tag{3.4.11e}$$

on dérive aussi les observations (3.3.4) par rapport à $t$

$$\frac{\partial u_t}{\partial \nu}(x,t) = 0, \quad \frac{\partial(\upsilon_t)}{\partial \nu}(x,t) = 0, \qquad \text{sur } \Sigma_1. \tag{3.4.12}$$

**Proposition 3.4.2** *Supposons* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$, (3.3.1), (3.3.2), (3.4.12). *Alors la famille à un paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le* $\{u_t,\upsilon_t\}$*-système* (3.4.11$a$)-(3.4.11$e$)

$$\begin{aligned}
&C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2 + \upsilon_{tt}^2 + |\nabla \upsilon_t|^2\right] dQ + C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u_t^2 + \upsilon_t^2\right] dxdt \\
&\leq c_{p,q}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u_t|^2 + |\upsilon_t|^2\right] dQ + C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q \left[u_t^2 + \upsilon_t^2\right] dQ + 4\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_{1t}|^2 + |gR_{2t}|^2\right] dQ \\
&+ c_T\tau^3 e^{-2\tau\delta}\left[E_{u_t}(0) + E_{u_t}(T) + E_{\upsilon_t}(0) + E_{\upsilon_t}(T)\right],
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

*pour tout* $\tau > 0$ *suffisamment grand, où*

$$c_{p,q} = \max\{c_q, c_p\}$$

**Preuve de la proposition 3.4.2**

De (3.4.11$c$), (3.4.11$d$), et (3.3.2), on a la régularité suivante pour le $\{u_t,\upsilon_t\}$-système (3.4.11$a$)-(3.4.11$e$)

$$u_t, \upsilon_t \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right) \subset H^{1,1}(Q).$$

Revenons à (3.4.11$a$), et (3.4.11$b$)

$$(u_t)_{tt} - \Delta(u_t) = q(x)(\upsilon_t) + f(x) R_{1t}(x,t), \tag{3.4.14}$$

$$(\upsilon_t)_{tt} - \Delta(\upsilon_t) = p(x)(u_t) + g(x) R_{2t}(x,t). \tag{3.4.15}$$

Pour s'adapter à (2.2.13), posons

$$F^{(u_t)}(x,t) = q(x)(\upsilon_t) + f(x) R_{1t}(x,t),$$

$$F^{(\upsilon_t)}(x,t) = p(x)(u_t) + g(x) R_{2t}(x,t).$$

Des hypothèses, (3.3.2), on a $F^{(u_t)} \in L^2(Q)$, $F^{(\upsilon_t)} \in L^2(Q)$. En utilisant la même démonstration de la proposition 3.4.1 , alors on obtient les contreparties des relations (3.4.4) et (3.4.7), via (3.4.11$e$) et (3.4.12)**.**

$$BT|_{\Sigma}(u_t) = 4\tau \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu) \left|\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_0 dt, \tag{3.4.16}$$

$$BT|_{\Sigma}(\upsilon_t) = 4\tau \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu) \left|\frac{\partial \upsilon_t}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_0 dt, \tag{3.4.17}$$

et aussi les contreparties des relations (3.4.5) et (3.4.8), sachant que $q$, $p \in L^{\infty}(\Omega)$

$$\int_Q e^{2\tau\varphi} |q(x)\upsilon_t + fR_{1t}|^2 dQ \leq c_q \int_Q e^{2\tau\varphi} |\upsilon_t|^2 dQ + 2\int_Q e^{2\tau\varphi} |fR_{1t}|^2 dQ, \tag{3.4.18}$$

$$\int_Q e^{2\tau\varphi} |p(x)u_t + gR_{2t}|^2 dQ \leq c_p \int_Q e^{2\tau\varphi} |u_t|^2 dQ + 2\int_Q e^{2\tau\varphi} |gR_{2t}|^2 dQ. \tag{3.4.19}$$

De (3.4.16) et (3.4.18), on obtient la contrepartie de l'estimation (3.4.6), avec le changement de $u$ par $u_t$

$$\begin{aligned} &C_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2\right] dQ + C_{2,\tau} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} u_t^2 dxdt \\ &\leq c_q \int_Q e^{2\tau\varphi} |\upsilon_t|^2 dQ + 4\int_Q e^{2\tau\varphi} |fR_{1t}|^2 dQ + C_{1,T} e^{2\tau\sigma} \int_Q u_t^2 dQ \\ &+ c_T \tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[E_{u_t}(0) + E_{u_t}(T)\right] + 4\tau \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu) \left|\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_0 dt. \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Aussi de (3.4.17) et (3.4.19), on obtient la contrepartie de l'estimation (3.4.9) , avec le changement de $\upsilon$ par $\upsilon_t$

$$\begin{aligned} &C_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[\upsilon_{tt}^2 + |\nabla \upsilon_t|^2\right] dQ + C_{2,\tau} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \upsilon_t^2 dxdt \\ &\leq c_p \int_Q e^{2\tau\varphi} |u_t|^2 dQ + 4\int_Q e^{2\tau\varphi} |gR_{2t}|^2 dQ + C_{1,T} e^{2\tau\sigma} \int_Q \upsilon_t^2 dQ \\ &+ c_T \tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[E_{\upsilon_t}(0) + E_{\upsilon_t}(T)\right] + 4\tau \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu) \left|\frac{\partial \upsilon_t}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_0 dt. \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

En combinant les estimations (3.4.20) et (3.4.21), on obtient la contrepartie de l'estimation (3.4.10)

$$\begin{aligned}
&C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_{tt}^2+|\nabla u_t|^2+\upsilon_{tt}^2+|\nabla \upsilon_t|^2\right]dQ+C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u_t^2+\upsilon_t^2\right]dxdt\\
&\leq c_{p,q}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u_t|^2+|\upsilon_t|^2\right]dQ+C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[u_t^2+\upsilon_t^2\right]dQ+4\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_{1t}|^2+|gR_{2t}|^2\right]dQ\\
&+c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}\left[E_{u_t}(0)+E_{u_t}(T)+E_{\upsilon_t}(0)+E_{\upsilon_t}(T)\right]\\
&+4\tau\int_0^T\int_{\Gamma_0} e^{2\tau\varphi}(h.\nu)\left[\left|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial \upsilon_t}{\partial\nu}\right|^2\right]d\Gamma_0 dt, \qquad (3.4.22)
\end{aligned}$$

l'estimation (3.4.22) avec (2.2.4) donnent l'estimation souhaitée (3.4.13).

**Étape 3.**

On dérive le $\{u_t,\upsilon_t\}$-système (3.4.11$a$)-(3.4.11$e$) , et (3.4.12) par rapport à $t$, pour avoir

$$(u_{tt})_{tt}-\Delta(u_{tt})=q(x)(\upsilon_{tt})+f(x)R_{1tt}(x,t) \quad \text{dans } Q, \qquad (3.4.23a)$$

$$(\upsilon_{tt})_{tt}-\Delta(\upsilon_{tt})=p(x)(u_{tt})+g(x)R_{2tt}(x,t) \quad \text{dans } Q, \qquad (3.4.23b)$$

$$(u_{tt})(.,\frac{T}{2})=f(x)R_1(.,\frac{T}{2}),\ \ (u_t)_{tt}(.,\frac{T}{2})=f(x)R_{1t}(.,\frac{T}{2}) \quad \text{dans } \Omega, \qquad (3.4.23c)$$

$$(\upsilon_{tt})(.,\frac{T}{2})=g(x)R_2(.,\frac{T}{2}),\ \ (\upsilon_t)_{tt}\left(.,\frac{T}{2}\right)=g(x)R_{2t}(.,\frac{T}{2}) \quad \text{dans } \Omega, \qquad (3.4.23d)$$

$$(u_{tt})(x,t)=0,\ \ (\upsilon_{tt})(x,t)=0 \quad \text{sur } \Sigma, \qquad (3.4.23e)$$

$$\frac{\partial(u_{tt})}{\partial\nu}=\frac{\partial(\upsilon_{tt})}{\partial\nu}=0, \qquad \text{sur } \Sigma_1. \qquad (3.4.24)$$

De (3.4.23$c$), (3.4.23$d$) , et (3.3.2), on a

$$(u_{tt})_t\left(.,\frac{T}{2}\right),(\upsilon_{tt})_t\left(.,\frac{T}{2}\right)\in L^2(\Omega). \qquad (3.4.25)$$

Cependant

$$(u_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right),(\upsilon_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right) \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ mais non dans } H_0^1(\Omega).$$

Ainsi, on montre d'abord l'unicité du problème inverse linéaire lorsque

$$f(.)R_1\left(.,\frac{T}{2}\right),\ g(.)R_2\left(.,\frac{T}{2}\right)\in H_0^1(\Omega). \qquad (3.4.26)$$

Ensuite, Nous étendrons le résultat à tout $f(.)\in L^2(\Omega)$, $g(.)\in L^2(\Omega)$, en utilisant

$(i)$ la continuité de l'application $\{f,g\}\longrightarrow \frac{\partial u(f,g)}{\partial\nu}(x,t)|_{\Sigma_1}$ , $\frac{\partial \upsilon(f,g)}{\partial\nu}(x,t)|_{\Sigma_1}$.

$(ii)$ la densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

La régularité (3.4.26) est vrai à condition que

$$f(.) \in H_0^1(\Omega), \text{ et } R_1\left(., \frac{T}{2}\right) \text{ est un multiplicateur } H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega), \tag{3.4.27}$$

$$g(.) \in H_0^1(\Omega), \text{et } R_1\left(., \frac{T}{2}\right) \text{ est un multiplicateur } H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega). \tag{3.4.28}$$

Une caractérisation pour (3.4.27), et (3.4.28) est donnée dans ([63], théorème 1 avec $m = l = 1$, $p = 2$).

De (3.4.26), (3.4.25), et (3.3.2) avec $f,\ g \in H_0^1(\Omega)$, on a la régularité suivante pour $\{u_{tt},\ v_{tt}\}$-système (3.4.23$a$)-(3.4.23$e$)

$$u_{tt},\ v_{tt} \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right) \subset H^{1,1}(Q). \tag{3.4.29}$$

En appliquant le théorème 2.2.2 au $\{u_{tt}, v_{tt}\}$-système (3.4.23$a$)-(3.4.23$e$), on obtient la proposition suivante

**Proposition 3.4.3** *Supposons* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$, (3.3.1), (3.4.24), *ainsi que* (3.3.2) *où* $f,\ g \in H_0^1(\Omega)$. *Alors la famille à un paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le* $\{u_{tt}, v_{tt}\}$*-système* (3.4.23$a$ − 3.4.23$e$)

$$\begin{aligned}
&C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_{ttt}^2 + |\nabla u_{tt}|^2 + v_{ttt}^2 + |\nabla v_{tt}|^2\right]dQ + C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u_{tt}^2 + v_{tt}^2\right]dxdt \\
&\leq c_{p,q}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u_{tt}|^2 + |v_{tt}|^2\right]dQ + C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[u_{tt}^2 + v_{tt}^2\right]dQ + 4\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_{1tt}|^2 + |gR_{2tt}|^2\right]dQ \\
&+ c_T\tau^3 e^{-2\tau\delta}\left[E_{u_{tt}}(0) + E_{u_{tt}}(T) + E_{v_{tt}}(0) + E_{v_{tt}}(T)\right].
\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

*pour tout* $\tau > 0$ *suffisamment grand.*

La preuve de cette proposition est similaire aux propositions précédentes.

**Étape 4.**

On résume les résultats obtenus ci-dessus dans la proposition suivante.

**Proposition 3.4.4** *Supposons* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$, (3.3.1), (3.3.4), *ainsi que* (3.3.2) *où* $f,\ g \in H_0^1(\Omega)$. *Alors la famille à un paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le* $\{u, v\}$*-système (*3.2.3$a$)-

(3.2.3$e$)

$$
\begin{aligned}
&C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}[u_t^2+|\nabla u|^2+v_t^2+|\nabla v|^2+u_{tt}^2+|\nabla u_t|^2+v_{tt}^2+|\nabla v_t|^2+u_{ttt}^2+|\nabla u_{tt}|^2+v_{ttt}^2+|\nabla v_{tt}|^2\ ]dQ\\
&+C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u^2+v^2+u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dxdt\\
&\leq c_{p,q}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u|^2+|v|^2+|u_t|^2+|v_t|^2+|u_{tt}|^2+|v_{tt}|^2\right]dQ\\
&+C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[u^2+v^2+u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ\\
&+4\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_1|^2+|gR_2|^2+|fR_{1t}|^2+|gR_{2t}|^2+|fR_{1tt}|^2+|gR_{2tt}|^2\right]dQ\\
&+c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}[E_u(0)+E_u(T)+E_v(0)+E_v(T)+E_{u_t}(0)+E_{u_t}(T)+E_{v_t}(0)+E_{v_t}(T)\\
&+E_{u_{tt}}(0)+E_{u_{tt}}(T)+E_{v_{tt}}(0)+E_{v_{tt}}(T)].
\end{aligned}
\tag{3.4.31}
$$

*pour tout* $\tau>0$ *suffisamment grand*

**Étape 5.**

Dans cette étape, nous simplifions la troisième intégrale du membre droit de l'estimation (3.4.31).

**Proposition 3.4.5 .** *Supposons* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$, (3.3.1), (3.3.4), *ainsi que* (3.3.2) *où* $f,\ g\in H_0^1(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_1|^2+|gR_2|^2+|fR_{1t}|^2+|gR_{2t}|^2+|fR_{1tt}|^2+|gR_{2tt}|^2\right]dQ\\
&\leq C_R\{\left[\left(\frac{T}{r_1^2}\right)(2cT\tau+1)\right]\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}|u_{tt}(x,s)|^2\,dsd\Omega\\
&+\left(\frac{T}{r_1^2}\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}|u_{ttt}(x,s)|^2\,dsd\Omega+\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega|u_{tt}(x,0)|^2\,d\Omega\\
&\left[\left(\frac{T}{r_2^2}\right)(2cT\tau+1)\right]\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}|v_{tt}(x,s)|^2\,dsd\Omega\\
&+\left(\frac{T}{r_2^2}\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}|v_{ttt}(x,s)|^2\,dsd\Omega+\frac{T}{r_2^2}\int_\Omega|v_{tt}(x,0)|^2\,d\Omega\}.
\end{aligned}
\tag{3.4.32}
$$

**Preuve de la proposition 3.4.5**

Pour montrer cette proposition, nous suivons une idée de ([31], Theorem 8.2.2, p. 231).

*Étape i.* Par l'hypothèse (3.3.2) sur $R_i, R_{it}, R_{itt}\in L^\infty(Q)$, $i=1,2$, on a

$$
\begin{aligned}
&\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_1|^2+|gR_2|^2+|fR_{1t}|^2+|gR_{2t}|^2+|fR_{1tt}|^2+|gR_{2tt}|^2\right]dQ\\
&\leq C_R\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|f|^2+|g|^2\right]dQ,
\end{aligned}
\tag{3.4.33}
$$

avec $C_R$ une constante dépendante des normes $L^\infty(Q)$ de $R_i, R_{it}, R_{itt}$.

*Étape ii.* On évalue l'équation (3.2.3$a$) et l'équation (3.2.3$b$) au temps initial $\left(\frac{T}{2}\right)$, en utilisant (3.2.3$c$),

$(3.2.3d)$ . On obtient

$$u_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)=f\left(x\right)R_1\left(x,\frac{T}{2}\right),\quad \upsilon_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)=g\left(x\right)R_2\left(x,\frac{T}{2}\right). \tag{3.4.34}$$

Puisque $\left|R_1\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|\geq r_1>0$ et $\left|R_2\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|\geq r_2>0$ dans $\Omega$ à partir de l'hypothèse (3.3.3), on a

$$\left|f\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{r_1}\left|u_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|,\quad \left|g\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{r_2}\left|\upsilon_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|. \tag{3.4.35}$$

Utilisant (3.4.35) pour $f$, et la propriété (2.2.8) avec (2.2.5) , alors

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left|f\right|^2dQ&=\int_0^T\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,t)}\left|f\left(x\right)\right|^2d\Omega dt\leq\frac{1}{r_1^2}\int_0^T\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,t)}\left|u_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|^2d\Omega dt\\&\leq\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi\left(x,\frac{T}{2}\right)}\left|u_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|^2d\Omega\\&\leq\frac{T}{r_1^2}\left(\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{d}{ds}\left(e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}\left(x,s\right)\right|^2\right)dsd\Omega+\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}\left(x,0\right)\right|^2d\Omega\right)\\&\leq\frac{T}{r_1^2}\{4c\tau\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{T}{2}-s\right)e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega+\\&2\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}\left(x,s\right)\right|\left|u_{ttt}\left(x,s\right)\right|dsd\Omega+\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}\left(x,0\right)\right|^2d\Omega\},\end{aligned} \tag{3.4.36}$$

en appliquant l'inégalité de Young (corollaire A.2, annexe A), et puisque $\left(\frac{T}{2}-s\right)\leq\frac{T}{2}$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left|f\right|^2dQ&\leq\frac{T}{r_1^2}\{(2cT\tau)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi}\left|u_{tt}\right|^2dtd\Omega+\\&\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi}(\left|u_{tt}\right|^2+\left|u_{ttt}\right|^2)dtd\Omega+\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}\left(x,0\right)\right|^2d\Omega\}\\&\leq\frac{T}{r_1^2}\left(2cT\tau+1\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega\\&+\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{ttt}\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega+\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}\left(x,0\right)\right|^2d\Omega,\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

La conséquence de (3.4.37) et (2.2.9) est l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left|f\right|^2dQ&\leq\left[\left(\frac{T}{r_1^2}\right)\left(2cT\tau+1\right)\right]\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega\\&+\left(\frac{T}{r_1^2}\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{ttt}\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega+\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega\left|u_{tt}\left(x,0\right)\right|^2d\Omega,\end{aligned} \tag{3.4.38}$$

*Étape iii.* A partir de l'hypothèse (3.4.35) sur $g$ et en suivant la même méthode précédente, on trouve

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left|g\right|^2dQ&\leq\left[\left(\frac{T}{r_2^2}\right)\left(2cT\tau+1\right)\right]\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|\upsilon_{tt}\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega\\&+\left(\frac{T}{r_2^2}\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|\upsilon_{ttt}\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega+\frac{T}{r_2^2}\int_\Omega\left|\upsilon_{tt}\left(x,0\right)\right|^2d\Omega.\end{aligned} \tag{3.4.39}$$

L'estimation (3.4.32) est une consequence de (3.4.38) et (3.4.39) .

**Étape 6.**

Remplaçons l'estimation (3.4.32) sur le membre droit de l'estimation (3.4.31), on trouve

$$
\begin{aligned}
&C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+|\nabla u_t|^2+|\nabla v_t|^2+|\nabla u_{tt}|^2+|\nabla v_{tt}|^2\right]dQ\ +\\
&\left[C_{1,\tau}-C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)\right]\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_{ttt}^2+v_{ttt}^2\right]dQ+\\
&\left[C_{1,\tau}-C_{p;q}\right]\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ\\
&+C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u^2+v^2+u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dxdt\\
&\leq c_{p,q}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u|^2+|v|^2\right]dQ+C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[u^2+v^2+u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ\\
&C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)(2cT\tau+1)\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ+\\
&C_R\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega+C_R\frac{T}{r_2^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|v_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega\\
&+c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}[E_u(0)+E_u(T)+E_v(0)+E_v(T)+E_{u_t}(0)+E_{u_t}(T)+E_{v_t}(0)+E_{v_t}(T)\\
&+E_{u_{tt}}(0)+E_{u_{tt}}(T)+E_{v_{tt}}(0)+E_{v_{tt}}(T)].
\end{aligned}
\tag{3.4.40}
$$

**Étape 7.** Par (2.2.11), on a $e^{2\tau\varphi}<e^{2\tau\sigma}$ sur $Q/Q(\sigma)$, on obtient l'estimation suivante pour les termes intégraux du membre droit de l'inégalité (3.4.40)

$$
\begin{aligned}
\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u^2+v^2\right]dQ&=\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u^2+v^2\right]dxdt+\int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u^2+v^2\right]dxdt\\
&<\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u^2+v^2\right]dxdt+e^{2\tau\sigma}\int_{Q/Q(\sigma)}\left[u^2+v^2\right]dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.4.41}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ&=\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dxdt+\int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dxdt\\
&<\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dxdt+e^{2\tau\sigma}\int_{Q/Q(\sigma)}\left[u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.4.42}
$$

Insérons les estimations (3.4.41) , (3.4.42) dans l'estimation (3.4.40), nous obtenons l'estimation finale du

$\{u,v\}$-système (3.2.3$a$)-(3.2.3$e$).

$$
\begin{aligned}
&C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+|\nabla u_t|^2+|\nabla v_t|^2+|\nabla u_{tt}|^2+|\nabla v_{tt}|^2\right]dQ\\
&\left[C_{1,\tau}-C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)\right]\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_{ttt}^2+v_{ttt}^2\right]dQ\\
&\left[C_{1,\tau}-C_{p;q}\right]\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ+\\
&\left[C_{2,\tau}-c_{p,q}-C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)(2cT\tau+1)\right]\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u^2+v^2+u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dxdt\\
&\leq c_{p,q}e^{2\tau\sigma}\int_{Q/Q(\sigma)}\left[|u|^2+|v|^2\right]dQ+C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[u^2+v^2+u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ+\\
&C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)(2cT\tau+1)\,e^{2\tau\sigma}\int_{Q/Q(\sigma)}\left[u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ+\\
&C_R\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega+C_R\frac{T}{r_2^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|v_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega\\
&+c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}[E_u(0)+E_u(T)+E_v(0)+E_v(T)+E_{u_t}(0)+E_{u_t}(T)+E_{v_t}(0)+E_{v_t}(T)\\
&+E_{u_{tt}}(0)+E_{u_{tt}}(T)+E_{v_{tt}}(0)+E_{v_{tt}}(T)].
\end{aligned}
\tag{3.4.43}
$$

**Étape 8.**

Comme tous les coefficients des termes intégraux du membre gauche de l'estimation (3.4.43) sont positifs pour $\tau>0$ suffisamment grand (voir (2.2.16)), alors

$$
\begin{aligned}
&\left[C_{2,\tau}-c_{p,q}-C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)(2cT\tau+1)\right]\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[u^2+v^2+u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dxdt\\
&\leq c_{p,q}e^{2\tau\sigma}\int_{Q/Q(\sigma)}\left[|u|^2+|v|^2\right]dQ+C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[u^2+v^2+u_t^2+v_t^2+u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ\\
&C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)(2cT\tau+1)\,e^{2\tau\sigma}\int_{Q/Q(\sigma)}\left[u_{tt}^2+v_{tt}^2\right]dQ+\\
&C_R\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega+C_R\frac{T}{r_2^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|v_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega\\
&+c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}[E_u(0)+E_u(T)+E_v(0)+E_v(T)+E_{u_t}(0)+E_{u_t}(T)+E_{v_t}(0)+E_{v_t}(T)\\
&+E_{u_{tt}}(0)+E_{u_{tt}}(T)+E_{v_{tt}}(0)+E_{v_{tt}}(T)].
\end{aligned}
\tag{3.4.44}
$$

Car $e^{2\tau\varphi}\geq e^{2\tau\sigma}$ sur $Q(\sigma)$ par (2.2.11). En divisant l'inégalité (3.4.44) par $(2cT\tau+1)\,e^{2\tau\sigma}$, on obtient, pour

$\tau > 0$ grand

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2cT\tau+1)}\left[C_{2,\tau}-c_{p,q}-C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)(2cT\tau+1)\right]\int_{Q(\sigma)}\left[u^2+\upsilon^2+u_t^2+\upsilon_t^2+u_{tt}^2+\upsilon_{tt}^2\right]dxdt\\
&\quad\leq\frac{c_{p,q}}{(2cT\tau+1)}\int_{Q/Q(\sigma)}\left[|u|^2+|\upsilon|^2\right]dQ+\frac{C_{1,T}}{(2cT\tau+1)}\int_Q\left[u^2+\upsilon^2+u_t^2+\upsilon_t^2+u_{tt}^2+\upsilon_{tt}^2\right]dQ\\
&\quad C_RT\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)\int_{Q/Q(\sigma)}\left[u_{tt}^2+\upsilon_{tt}^2\right]dQ+\\
&\quad\frac{1}{(2cT\tau+1)\,e^{2\tau\sigma}}\left\{C_R\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega+C_R\frac{T}{r_2^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|\upsilon_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega\right\}\\
&\quad+\frac{c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}}{(2cT\tau+1)\,e^{2\tau\sigma}}[E_u(0)+E_u(T)+E_\upsilon(0)+E_\upsilon(T)+E_{u_t}(0)+E_{u_t}(T)\\
&\quad+E_{\upsilon_t}(0)+E_{\upsilon_t}(T)+E_{u_{tt}}(0)+E_{u_{tt}}(T)+E_{\upsilon_{tt}}(0)+E_{\upsilon_{tt}}(T)].\\
&\quad\leq const_{u,\upsilon,data}
\end{aligned}\tag{3.4.45}$$

Donc, pour $\tau\to+\infty$ dans (3.4.45), et en rappelant que $C_{2,\tau}$ est d'ordre $\tau^3$ voir (2.2.16), on obtient

$$u(x,t)=0,\quad \upsilon(x,t)=0,\qquad (x,t)\in Q(\sigma).\tag{3.4.46}$$

Alors (3.4.46) implique $u_{tt}=0$, $\Delta u=0$, $\upsilon_{tt}=0$, $\Delta\upsilon=0$ sur $Q(\sigma)$. Ainsi, revenant à $(3.2.3a),(3.2.3b)$, on obtient

$$f(x)R_1(x,t)=0,\quad g(x)R_2(x,t)=0\quad\text{sur } Q(\sigma).\tag{3.4.47}$$

De (2.2.12), et puisque $t_0<\frac{T}{2}<t_1$ par (2.2.10), on voit que (3.4.47) implique

$$f(x)R_1\left(x,\frac{T}{2}\right)=0,\ g(x)R_2\left(x,\frac{T}{2}\right)=0\quad x\in\Omega.\tag{3.4.48}$$

(3.4.48) avec (3.3.3), on trouve

$$f(x)=0,\qquad g(x)=0\quad x\in\Omega.\tag{3.4.49}$$

On complète ainsi la démonstration du théorème 3.3.1 sous la condition (3.4.27)-(3.4.28).

**Étape 9.**

Problème $(3.2.3a)$-$(3.2.3e)$ sous les hypothèses (3.3.2), on a l'application

$$\{f,g\}\longrightarrow\frac{\partial u(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1},\frac{\partial\upsilon(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1}\tag{3.4.50}$$

est continue $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\longrightarrow C\left([0,T],H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right)$.

Finalement, puisque $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, la conclusion de (3.4.49) que $\{\frac{\partial u(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1}=0,\frac{\partial\upsilon(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1}=0\}$ pour $\{f,g\}\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, peut être étendu via (3.4.50) à $\{\frac{\partial u(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1}=0,\frac{\partial\upsilon(f,g)}{\partial\nu}|_{\Sigma_1}=0\}$ pour tous $\{f,g\}\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$. La preuve du théorème 3.3.1 est achevée.

## 3.5 Unicité du problème inverse dans le cas non linéaire

**Démonstration du théorème 3.3.2.**

La preuve du théorème 3.3.2 pour le $\{w, z\}$-système (3.2.1$a$)-(3.2.1$e$) est une conséquence directe du théorème 3.3.1 pour le $\{u, \upsilon\}$-système (3.2.3$a$)-(3.2.3$e$).

De (3.2.2), on a

$$\begin{aligned} &f(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad g(x) = p_1(x) - p_2(x), \\ &R_1(x,t) = z(q_2,p_2)(x,t), \quad R_2(x,t) \ = w(q_2,p_2)(x,t), \\ &u(x,t) \ = w(q_1,p_1)(x,t) - w(q_2,p_2)(x,t), \\ &\upsilon(x,t) = z(q_1,p_1)(x,t) - z(q_2,p_2)(x,t). \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Les hypothèses (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8), et (3.3.9) du théorème 3.3.2 impliquent l'hypothèse (3.3.2) et (3.3.3) du théorème 3.3.1. Enfin, de (3.3.10) et (3.5.1), on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u(f,g)}{\partial \nu}(x,t) = 0 \\ \frac{\partial \upsilon(f,g)}{\partial \nu}(x,t) = 0 \end{cases} \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{3.5.2}$$

D'après le théorème 3.3.1, on obtient

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0, \ \ x \in \Omega. \tag{3.5.3}$$

Donc

$$q_1(x) = q_2(x), \quad p_1(x) = p_2(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.5.4}$$

La preuve du théorème 3.3.2 est achevée.

## 3.6 Inégalité d'observabilité

La clé pour la preuve du théorème 3.3.3 et théorème 3.3.4 sont une inégalité d'observabilité et un argument de compacité-unicité. Dans ce paragraphe, on énonce une inégalité d'observabilité pour un système couplé

avec conditions aux limites de Dirichlet homogène. Considérons le problème

$$u_{tt} - \Delta u = q(x)\upsilon \qquad \text{dans } Q, \tag{3.6.1a}$$

$$\upsilon_{tt} - \Delta \upsilon = p(x)u \qquad \text{dans } Q, \tag{3.6.1b}$$

$$u(.,\frac{T}{2}) = u_0(x),\ u_t(.,\frac{T}{2}) = u_1(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.6.1c}$$

$$\upsilon(.,\frac{T}{2}) = \upsilon_0(x),\ \upsilon_t(.,\frac{T}{2}) = \upsilon_1(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.6.1d}$$

$$u = 0, \quad \upsilon = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \tag{3.6.1e}$$

avec conditions initiales et coefficients de potentiel

$$\{u_0, u_1, \upsilon_0, \upsilon_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ et } q,\ p \in L^\infty(\Omega). \tag{3.6.2}$$

Alors, sa solution satisfait

$$u, \upsilon \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right). \tag{3.6.3}$$

L'inégalité d'observabilité dans le théorème suivant est vraie.

**Théorème 3.6.1** *Nous supposons que les hypothèses* $(H_{ii})$, $(H_{iii})$, *et* $(H_{iv})$ *sont vérifiées. Soit* $\{u, \upsilon\}$ *la solution du problème* $(3.6.1a - 3.6.1e)$. *Supposons, en outre* $(3.6.2)$, *et* $T > T_0$, *avec* $T_0$ *défini par* $(3.3.1)$. *Alors il existe une constante* $C = C(\Omega, T, q, p) > 0$ *telle que*

$$C_T E(0) \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 + \left( \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} \right)^2 \right] d\Gamma_1 dt, \tag{3.6.4}$$

*ici,* $\Gamma_1$ *est la partie contrôlée ou observée de la frontière. Et*

$$E(t) = E_u(t) + E_\upsilon(t), \tag{3.6.5}$$

*où* $E_y(t) = \int_\Omega \left[ y^2(x,t) + y_t^2(x,t) + |\nabla y(x,t)|^2 \right] d\Omega$ *comme dans* $(2.2.18)$.

**Démonstration du théorème 3.6.1**

Le résultat d'observabilité (3.6.4) est le même que le résultat d'observabilité dans ([44], théorème 1.3, Cas 1), où est utilisée une estimation de Carleman différente de (2.2.15). Cependant, nous pouvons utiliser la méthodologie fournie dans ([44], paragraphe 3) pour démontrer l'estimation (3.6.4) en utilisant l'estimation de Carleman (2.2.15).

## 3.7 Stabilité du problème inverse dans le cas linéaire

**Démonstration du théorème 3.3.3.**

**Étape 1**. Considérons le $\{u_t, \upsilon_t\}$-système (3.4.11$a$)-(3.4.11$e$)

$$(u_t)_{tt} - \Delta(u_t) = q(x)(\upsilon_t) + f(x) R_{1t}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.7.1a}$$

$$(\upsilon_t)_{tt} - \Delta\upsilon_t = p(x)(u_t) + g(x) R_{2t}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.7.1b}$$

$$(u_t)(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (u_t)_t(.,\frac{T}{2}) = f(x) R_1(.,\frac{T}{2}) \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7.1c}$$

$$(\upsilon_t)(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (\upsilon_t)_t(.,\frac{T}{2}) = g(x) R_2(.,\frac{T}{2}) \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7.1d}$$

$$(u_t)(x,t) = 0, \ \ (\upsilon_t)(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \tag{3.7.1e}$$

avec $\{u_t = u_t(f,g)(x,t), \upsilon_t = \upsilon_t(f,g)(x,t)\}$. Posons

$$u_t = \hat{u}_t + \tilde{u}_t, \ \ \upsilon_t = \hat{\upsilon}_t + \tilde{\upsilon}_t, \tag{3.7.2}$$

alors

$$(\hat{u}_t)_{tt} - \Delta(\hat{u}_t) = q(x)(\hat{\upsilon}_t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.7.3a}$$

$$(\hat{\upsilon}_t)_{tt} - \Delta(\hat{\upsilon}_t) = p(x)(\hat{u}_t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.7.3b}$$

$$(\hat{u}_t)(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (\hat{u}_t)_t(.,\frac{T}{2}) = f(x) R_1(.,\frac{T}{2}) \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7.3c}$$

$$(\hat{\upsilon}_t)(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (\hat{\upsilon}_t)_t(.,\frac{T}{2}) = g(x) R_2(.,\frac{T}{2}) \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7.3d}$$

$$(\hat{u}_t)(x,t) = 0, \ \ (\hat{\upsilon}_t)(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \tag{3.7.3e}$$

et

$$(\tilde{u}_t)_{tt} - \Delta(\tilde{u}_t) = q(x)(\tilde{\upsilon}_t) + f(x) R_{1t}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.7.4a}$$

$$(\tilde{\upsilon}_t)_{tt} - \Delta(\tilde{\upsilon}_t) = p(x)(\tilde{u}_t) + g(x) R_{2t}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.7.4b}$$

$$(\tilde{u}_t)(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (\tilde{u}_t)_t(.,\frac{T}{2}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7.4c}$$

$$(\tilde{\upsilon}_t)(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (\tilde{\upsilon}_t)_t(.,\frac{T}{2}) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7.4d}$$

$$(\tilde{u}_t)(x,t) = 0, \ \ (\tilde{\upsilon}_t)(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \tag{3.7.4e}$$

**Étape 2.** Au vu des hypothèses (3.6.2) du théorème 3.6.1, on applique l'inégalité d'observabilité (3.6.4) au

$\{\hat{u}_t, \hat{v}_t\}$-système (3.7.3$a$)-(3.7.3$e$), de sorte que

$$\begin{aligned}&\left\|f(.)\,R_1\left(.,\frac{T}{2}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|g(.)\,R_2\left(.,\frac{T}{2}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leq C^2_{T,q,p}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[\left(\frac{\partial\hat{u}_t}{\partial\nu}\right)^2+\left(\frac{\partial\hat{v}_t}{\partial\nu}\right)^2\right]d\Gamma_1 dt.\end{aligned}\tag{3.7.5}$$

En utilisant (3.3.3), (3.7.2) et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}&\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Omega)}\\&\leq C\left\{\left\|\frac{\partial\hat{u}_t}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_1)}+\left\|\frac{\partial\hat{v}_t}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}\\&=C\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial\nu}(u_t-\tilde{u}_t)\right\|_{L^2(\Sigma_1)}+\left\|\frac{\partial}{\partial\nu}(v_t-\tilde{v}_t)\right\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}\\&\leq C\left\{\left\|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_1)}+\left\|\frac{\partial\tilde{u}_t}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_1)}+\left\|\frac{\partial v_t}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_1)}+\left\|\frac{\partial\tilde{v}_t}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}\\&\leq C\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\|_{H^1(0,T,\,L^2(\Gamma_1))}+\left\|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right\|_{H^1(0,T,\,L^2(\Gamma_1))}+\left\|\frac{\partial\tilde{u}_t}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_1)}+\left\|\frac{\partial\tilde{v}_t}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\},\end{aligned}\tag{3.7.6}$$

**Étape 3.** Pour éliminer les termes $\frac{\partial\tilde{u}_t}{\partial\nu}$ et $\frac{\partial\tilde{v}_t}{\partial\nu}$, appliquons l'argument de compacité-unicité. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.7.1** *Considérons le* $\{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\}$*-système* (3.7.4$a$)-(3.7.4$e$) *avec des données*

$$q,\ p\in L^\infty(\Omega),\quad f,\ g\in L^2(\Omega),\ R_{1t}, R_{1tt},\ R_{2t}, R_{2tt}\in L^\infty(Q).\tag{3.7.7}$$

*Définissons les opérateurs* $K$ *et* $L$ *comme suit*

$$\begin{cases}K: L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\to L^2(\Sigma_1)\\(K\{f,g\})=\frac{\partial\tilde{u}_t}{\partial\nu}|_{\Sigma_1},\\L: L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\to L^2(\Sigma_1)\\(L\{f,g\})=\frac{\partial\tilde{v}_t}{\partial\nu}|_{\Sigma_1},\end{cases}\tag{3.7.8}$$

*alors*

$$K \text{ et } L \text{ sont des opérateurs compacts.}\tag{3.7.9}$$

**Preuve de lemme 3.7.1**

*Étape i.* Nous dérivons le $\{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\}$-system (3.7.4$a$)-(3.7.4$e$) par rapport à $t$, on trouve le $\{\tilde{u}_{tt}, \tilde{v}_{tt}\}$-system

$$(\tilde{u}_{tt})_{tt} - \Delta(\tilde{u}_{tt}) = q(x)(\tilde{v}_{tt}) + f(x) R_{1tt}(x,t) \qquad \text{dans } Q, \tag{3.7.10a}$$

$$(\tilde{v}_{tt})_{tt} - \Delta(\tilde{v}_{tt}) = p(x)(\tilde{u}_{tt}) + g(x) R_{2tt}(x,t) \qquad \text{dans } Q, \tag{3.7.10b}$$

$$(\tilde{u}_{tt})(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (\tilde{u}_t)_{tt}(.,\frac{T}{2}) = f(x) R_{1t}(x,\frac{T}{2}) \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7.10c}$$

$$(\tilde{v}_{tt})(.,\frac{T}{2}) = 0, \ \ (\tilde{v}_t)_{tt}(.,\frac{T}{2}) = g(x) R_{2t}(x,\frac{T}{2}) \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7.10d}$$

$$(\tilde{u}_{tt})(x,t) = 0, \ \ (\tilde{v}_{tt})(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \tag{3.7.10e}$$

Sous les hypothèses (3.3.2), on applique le (lemme B.1, annexe B) à $\{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\}$-système (3.7.4$a$)-(3.7.4$e$) et $\{\tilde{u}_{tt}, \tilde{v}_{tt}\}$-system (3.7.10$a$)-(3.7.10$e$), on obtient

$$\|(\tilde{u}_t)\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{3.7.11}$$

$$\|(\tilde{v}_t)\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{3.7.12}$$

et

$$\|(\tilde{u}_{tt})\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{3.7.13}$$

$$\|(\ \tilde{u}_{tt})_t\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{3.7.14}$$

$$\|(\tilde{v}_{tt})\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{3.7.15}$$

$$\|(\ \tilde{v}_{tt})_t\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}. \tag{3.7.16}$$

De (3.7.4$a$)-(3.7.4$e$) , on a

$$\begin{cases} \Delta(\tilde{u}_t) = (\tilde{u}_t)_{tt} - q(x)(\tilde{v}_t) - f(x) R_{1t}(x,t), \\ \Delta(\tilde{v}_t) = (\tilde{v}_t)_{tt} - p(x)(\tilde{u}_t) - g(x) R_{2t}(x,t), \end{cases} \qquad (x,t) \in Q \tag{3.7.17}$$

par (3.7.14) et (3.7.12), ainsi, par (3.7.16) et (3.7.11)

$$\|\Delta(\tilde{u}_t)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{3.7.18}$$

$$\|\Delta(\tilde{v}_t)\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{3.7.19}$$

en combinant ceci avec (3.7.11) et (3.7.12), on obtient via (corollaire A.1, annnexe A)

$$\|(\tilde{u}_t)\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{3.7.20}$$

$$\|(\tilde{v}_t)\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}. \tag{3.7.21}$$

Par conséquent, par la théorie des traces, on a

$$\left\| \frac{\partial (\tilde{u}_t)}{\partial \nu} \right\|_{L^\infty\left(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\}, \tag{3.7.22}$$

$$\left\| \frac{\partial (\tilde{v}_t)}{\partial \nu} \right\|_{L^\infty\left(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \tag{3.7.23}$$

D'un autre côté, on applique le (lemme B.1, annexe B) à $\{\tilde{u}_{tt}, \tilde{v}_{tt}\}$-system (3.7.10$a$)-(3.7.10$e$), ce qui donne

$$\left\| \frac{\partial (\tilde{u}_{tt})}{\partial \nu} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\}, \tag{3.7.24}$$

$$\left\| \frac{\partial (\tilde{v}_{tt})}{\partial \nu} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \tag{3.7.25}$$

*Étape ii.*

**Compacité de** $K$. De (3.7.22) et (3.7.24), on conclut que $K$ est un opérateur compact.

**Compacité de** $L$. De même, à partir de (3.7.23) et (3.7.25), on a $L$ est un opérateur compact, car l'injection (plongement) $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est compact, via ( théorème A.2, annexe A). Ceci complète la démonstration du lemme 3.7.1.

**Étape 4.** On utilisons (3.7.9) pour eliminer les termes $\left\| \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}$, $\left\| \frac{\partial \tilde{v}_t}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}$, dans l'estimation (3.7.6), via l'argument de compacité-unicité.

Supposons, par contradiction, que l'inégalité (3.3.12) soit fausse. Alors, il existe des suites $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ dans $L^2(\Omega)$, telles que

$$\|f_n\|_{L^2(\Omega)} = \|g_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad n \geq 1, \tag{3.7.26}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{\partial u (f_n, g_n)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} + \left\| \frac{\partial v (f_n, g_n)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} = 0, \tag{3.7.27}$$

A partir de (3.7.26), il existe des sous-suites, toujours notées $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$, telles que

$$\{f_n\} \text{ converge faiblement dans } L^2(\Omega) \text{ vers } \{f_0\} \in L^2(\Omega), \tag{3.7.28}$$

$$\{g_n\} \text{ converge faiblement dans } L^2(\Omega) \text{ vers } \{g_0\} \in L^2(\Omega). \tag{3.7.29}$$

Puisque $K$ et $L$ sont compacts (lemme **3.7.1)**

Alors, (3.7.9) donne que

$$\lim_{m,n\to+\infty} \|K\{f_n, g_n\} - K\{f_m, g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} = \lim_{m,n\to+\infty} \|L\{f_n, g_n\} - L\{f_m, g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} = 0. \tag{3.7.30}$$

D'autre part, il découle de (3.7.6) que, en utilisant (3.7.8)

$$
\begin{aligned}
&\|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_m\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C\{\left\| \frac{\partial u\left(f_n, g_n\right)}{\partial \nu} - \frac{\partial u\left(f_m, g_m\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} + \left\| \frac{\partial \upsilon\left(f_n, g_n\right)}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon\left(f_m, g_m\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} \}+ \\
&C\{\|K\left\{f_n, g_n\right\} - K\left\{f_m, g_m\right\}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|L\left\{f_n, g_n\right\} - L\left\{f_m, g_m\right\}\|_{L^2(\Sigma_1)}\} \\
&\leq C\{\left\| \frac{\partial u\left(f_n, g_n\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} + \left\| \frac{\partial u\left(f_m, g_m\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} + \left\| \frac{\partial \upsilon\left(f_n, g_n\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} \\
&+ \left\| \frac{\partial \upsilon\left(f_m, g_m\right)}{\partial \nu} \right\|\} + C\{\|K\left\{f_n, g_n\right\} - K\left\{f_m, g_m\right\}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|L\left\{f_n, g_n\right\} - L\left\{f_m, g_m\right\}\|_{L^2(\Sigma_1)}\}, \qquad (3.7.31)
\end{aligned}
$$

où $n, m \geq 1$.

Par conséquent, par (3.7.27) et (3.7.30), on a

$$
\lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)} = 0, \qquad \lim_{n,m\to+\infty} \|g_n - g_m\|_{L^2(\Omega)} = 0. \qquad (3.7.32)
$$

Par unicité de la limite, et par (3.7.28),(3.7.29), on obtient

$$
\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f_0\|_{L^2(\Omega)} = 0, \ \lim_{n\to+\infty} \|g_n - g_0\|_{L^2(\Omega)} = 0. \qquad (3.7.33)
$$

Par (3.7.26) , on obtient

$$
\|f_0\|_{L^2(\Omega)} = \|g_0\|_{L^2(\Omega)} = 1. \qquad (3.7.34)
$$

Sous les hypothèses (3.3.2), on peut appliquer le (lemme B.1, annexe B) à $\{u, v\}$-système (3.2.3$a$)-(3.2.3$e$), et $\{u_t, v_t\}$-système (3.4.11$a$)-(3.4.11$e$), on obtient

$$
\left\| \frac{\partial u\left(f, g\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} \leq C\left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right), \qquad (3.7.35)
$$

$$
\left\| \frac{\partial \upsilon\left(f, g\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} \leq C\left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right). \qquad (3.7.36)
$$

Comme l'application $\{f, g\} \to \{ \frac{\partial u(f,g)}{\partial \nu}\Big|_{\Sigma}, \frac{\partial \upsilon(f,g)}{\partial \nu}\Big|_{\Sigma} \}$ est linéaire, on diduit de (3.7.28), (3.7.29)

$$
\left\| \frac{\partial u\left(f_n, g_n\right)}{\partial \nu} - \frac{\partial u\left(f_0, g_0\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} \leq C\left( \|f_n - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_0\|_{L^2(\Omega)} \right), \qquad (3.7.37)
$$

$$
\left\| \frac{\partial \upsilon\left(f_n, g_n\right)}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon\left(f_0, g_0\right)}{\partial \nu} \right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))} \leq C\left( \|f_n - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_0\|_{L^2(\Omega)} \right). \qquad (3.7.38)
$$

En combinant (3.7.33) avec (3.7.37) et (3.7.38), on trouve

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\left\|\frac{\partial u\left(f_n,g_n\right)}{\partial\nu}-\frac{\partial u\left(f_0,g_0\right)}{\partial\nu}\right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left\|\frac{\partial \upsilon\left(f_n,g_n\right)}{\partial\nu}-\frac{\partial \upsilon\left(f_0,g_0\right)}{\partial\nu}\right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))}=0,\end{aligned}\tag{3.7.39}$$

De (3.7.27), on obtient pour $t\in[0,T]$

$$\frac{\partial u\left(f_0,g_0\right)}{\partial\nu}(x,t)=\frac{\partial \upsilon\left(f_0,g_0\right)}{\partial\nu}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Sigma_1.\tag{3.7.40}$$

D'après le théorème 3.3.1, (3.7.40) implique que

$$f_0(x)=g_0(x)=0,\quad x\in\ \Omega.\tag{3.7.41}$$

ce qui contredit (3.7.34). Ainsi, la preuve du théorème 3.3.3 est achevée.

## 3.8 Stabilité du problème inverse dans le cas non linéaire

**Démonstration du théorème 3.3.4**

On termine ce chapitre par la démonstration du théorème 3.3.4 (stabilité du problème inverse non linéaire) qui est une conséquence directe du théorème 3.3.3 (stabilité du problème inverse linéaire).

Rappelons (3.2.2)

$$\begin{aligned}&f(x)=q_1(x)-q_2(x),\ g(x)=p_1(x)-p_2(x),\\&R_1(x,t)=z\left(q_2,p_2\right)(x,t),\ R_2(x,t)\ =w\left(q_2,p_2\right)(x,t),\\&u(x,t)\ =w\left(q_1,p_1\right)(x,t)-w\left(q_2,p_2\right)(x,t),\\&\upsilon(x,t)=z\left(q_1,p_1\right)(x,t)-z\left(q_2,p_2\right)(x,t).\end{aligned}$$

Puisque $q_1(.),q_2(.),p_1(.),p_2(.)\in L^\infty(\Omega)$, $w\left(q_2,p_2\right)(x,t),z\left(q_2,p_2\right)(x,t)\in C\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T],L^2(\Omega)\right)$, alors

$f(.),\ g(.)\in L^2(\Omega),\ R_1(.,.),R_2(.,.)\in L^\infty(Q)$ comme requis dans le théorème 3.3.3. Ainsi, on applique le théorème 3.3.3, à $u=w\left(q_1,p_1\right)-w\left(q_2,p_2\right)$ ,et $\upsilon=z\left(q_1,p_1\right)-z\left(q_2,p_2\right)$, et on obtient alors l'estimation de stabilité souhaitée (3.3.13)

$$\begin{aligned}&\|q_1-q_2\|_{L^2(\Omega)}+\|p_1-p_2\|_{L^2(\Omega)}\\&\leq C\{\left\|\frac{\partial w\left(q_1,p_1\right)}{\partial\nu}-\frac{\partial w\left(q_2,p_2\right)}{\partial\nu}\right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))}+\left\|\frac{\partial z\left(q_1,p_1\right)}{\partial\nu}-\frac{\partial z\left(q_2,p_2\right)}{\partial\nu}\right\|_{H^1(0,T,\ L^2(\Gamma_1))}\}.\end{aligned}$$

# Chapitre 4

# Problème inverse pour l'équation de Schrödinger

**Résumé**

Ce chapitre concerne le problème inverse de la récupération du coefficient de potentiel inconnu pour une équation de Schrödinger dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, avec une donnée de Neumann non homogène à partir d'une mesure aux limites de Dirichlet dépendante du temps. On présente des résultats d'unicité et de stabilité de Lipschitz pour ce problème inverse. L'idée principale pour obtenir ces résultats est basée essentiellement sur une inégalité d'observabilité et une estimation de Carleman.

## 4.1 Introduction

Le travail présenté dans ce chapitre concerne l'équation de Schrodinger, issue de la physique quantique et dont la solution est appelée "fonction d'onde". Nous nous concentrons ici notre attention sur les références traitant de problèmes inverses pour les équations de Schrödinger définies dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ ou d'une variété Riemannienne.

L'issue de la stabilité dans le problème inverse de la détermination du potentiel électrique indépendant du temps dans l'équation de Schrödinger avec des conditions aux limites de Dirichlet à partir d'une mesure frontière de Neumann sur une partie de la frontière est traité dans [2] et [56]. Baudouin et Puel [2] ont invoqué la méthode d'estimation de Carleman [9] alors que Mercado et al [56] ont établi l'estimation de Carleman avec une condition de pseudo-convexité relâchée. Ceci réduit alors la partie de la frontière sur laquelle la condition de Neumann est observée par rapport à [2] dans des géométries spécifiques. Dans ces deux articles, la donnée de Neumann est observée sur une partie de la frontière satisfaisant la condition de contrôle géométrique de Bardos, Lebeau et Rauch [1]. Cette condition a été détendue dans [3] en exigeant la connaissance du potentiel au voisinage de la frontière. Dans [16], Cristofol et Soccorsi ont prouvé la stabilité de Lipschitz dans le problème du recouvrement du potentiel magnétique dépendant du temps apparaissant dans l'équation de Schrödinger, à partir d'un nombre fini d'observations mesurées sur une partie de la frontière pour des choix différents de l'état initial par une méthode basée essentiellement sur une estimationd e Carleman appropriée. Ce résultat a été étendu dans [27] pour le recouvrement du potentiel électrique à valeur complexe et la direction du champ magnétique apparaissant dans l'équation de Schrödinger dynamique avec des coefficients statiques par un nombre fini de mesures frontière partielles de la solution. Bellasoued et Choulli [4] ont considéré l'équation de Schrödinger avec un potentiel magnétique et une donnée frontière de Dirichlet. En utilisant l'approche de l'application de Dirichlet-à-Neumann, ils ont établi une estimation de stabilité pour le champ magnétique. Yuan et Yamamoto [73] ont prouvé les estimations de Carleman pour l'équation de Schrödinger dans les espaces de Sobolev d'ordres négatifs et ont utilisé ces estimations pour établir l'unicité dans le problème inverse de la détermination du Lp-potentiel localement à partir des observations locales appropriées. Deng [17] a utilisé des outils de la géométrie Riemannienne pour obtenir une estimation de Carleman avec une fonction de poids pseudo-convexe pour l'équation de Schrödinger à coefficients variables dans la partie elliptique et dans les termes du premier ordre, puis obtenir ainsi des résultats d'unicité et de stabilité pour le problème inverse consistant dans le recouvrement du potentiel à partir d'une mesure de Neumann sur une partie de la frontière. Triggiani et Zhang [70] ont établi des résultats d'unicité et de stabilité pour le problème inverse de la détermination du coefficient du potentiel électrique pour l'équation de Schrödinger avec un potentiel magnétique défini sur un domaine connexe borné d'une variété Riemannienne, avec des condition de Dirichlet non homogène par le moyen d'une mesure de Neumann sur une partie de la frontière. Liu et Triggiani [54] ont considéré le problème inverse de la détermination simultanément des deux coefficients du potentiel électrique inconnus pour un système de deux équations de Schrödinger couplées, avec des termes potentiels magnétiques, et des conditions aux limites de Neumann, à

partir de mesures de Dirichlet sur une partie de la frontière. Sous des hypothèses géométriques appropriées sur la partie non observée de la frontière, ils ont montré en utilisant les estimations de Carleman pour l'équations de Schrödinger, un résultat d'unicité. Dou et Yamamoto [18] ont considéré le problème inverse de la détermination des potentiels électroniques moléculaires à champs libres pour un système de deux équations de Schrödinger couplées, à partir d'une observation appropriée sur un sous domaine du domaine spatial. Ils ont établi un résultat de stabilité de type logarithmique en utilisant les estimations de Carleman pour les équations de Schrödinger couplées et les équations de chaleur couplées, et la transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer. Dans l'article [75] les auteurs ont établi la stabilité Lipschitzienne pour le problème inverse de la détermination du potentiel stationnaire dans un système de deux équations de Schrödinger couplées à partir de mesures aux limites ou internes, les stabilités Lipschitz sont obtenues au moyen de nouvelles estimations de Carleman pour le système de deux équations de Schrödinger couplées.

A notre connaissance, il n'y a pas de résultat disponible dans la littérature mathématique sur la détermination du coefficient de potentiel pour l'équation de Schrödinger avec des conditions aux limites de Neumann à partir d'une mesure frontière de Dirichlet dépendante du temps. Dans ce chapitre, on utilise l'estimation de Carleman pour les équations de Schrödinger due à Lasiecka et al [46] et l'inégalité d'observabilité associée pour établir l'unicité et la stabilité de Lipschitz pour ce problème inverse sous certaines hypothèses de convexité sur la géométrie du domaine spatial et sous des condition faibles sur la régularité des données. Ce chapitre a fait l'objet de la publication [62].

## 4.2 Énoncé du problème

On considère le problème aux limites décrit par

$$iz_t(x,t) + \Delta z(x,t) = q(x)z(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{4.2.1a}$$

$$z(x, \frac{T}{2}) = z_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.2.1b}$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial \nu} |_{\Sigma} = g(x,t) \quad \text{sur } \Sigma, \tag{4.2.1c}$$

Ce problème est intéressant à la fois pour des raisons physiques (il se pose dans le problème de l'acoustique structurale) et pour des raisons mathématiques (la condition de Lopatinski's n'est pas satisfaite).

Ici la condition initiale $z_0(x)$ et la condition aux limites de Neumann $g(x,t)$ sont données. alors que, le potentiel $q$ est le coefficient inconnu indépendants du temps.

Soit $z = z(q)$ le solution du $z$-problème (4.2.1$a$)-(4.2.1$c$. Ce chapitre traite un problème inverse qui consiste à déterminer le potentiel $q$ à partir de l'observation frontière de Dirichlet $z$ sur $\Sigma_1$ . on montre l'unicité et la stabilité de ce problème inverse non linéaire caractérisé par l'application $\Phi_1 : q \to z(q)$ .

On va répondre plus précisément aux questions suivantes

**Unicité dans le problème inverse non linéaire**

Soit $z(q)$, $(z(p))$ solutions du $z$-problème (4.2.1$a$)-(4.2.1$c$) correspondante au potentiel $q$, $p$. Sous les hypothèses $(H_i), (H_{ii})$ ,et $(H_{iii})$, est-ce que l'égalité

$$z(q)|_{\Sigma_1} = z(p)|_{\Sigma_1}$$

implique que

$$q = p, \quad \text{sur } \Omega.$$

**Stabilité dans le problème inverse non linéaire.**

Sous les hypothèses $(H_i), (H_{ii})$, et $(H_{iii})$, est-il possible d'estimer $(q-p)|_\Omega$ par $(z(q)-z(p))|_{\Sigma_1}$ dans des normes convenables ?

En effet, avant de définir $p, q$ dans la version non linéaire, nous travaillons d'abord sur une version linéaire du problème.

**Problème inverse linéaire correspondant.**

on remarque que le problème inverse non linéaire peut être réduit à un problème inverse linéaire, si on pose

$$\begin{aligned} f(x) &= q(x) - p(x), \\ R(x,t) &= z(p)(x,t), \\ u(x,t) &= z(q)(x,t) - z(p)(x,t). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Alors, après avoir soustrait le $z$-problème (4.2.1$a$)-(4.2.1$c$) à coefficient $q$ du $z$-problème (4.2.1$a$)-(4.2.1$c$) à coefficient $p$, on obtient le problème suivant

$$iu_t(x,t) + \Delta u(x,t) = q(x)u(x,t) + f(x)R(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{4.2.3a}$$

$$u\left(., \frac{T}{2}\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.2.3b}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}|_\Sigma = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{4.2.3c}$$

où, le terme $f$ est le coefficient inconnu indépendant du temps.

Le $u$-problème (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$) a l'avantage sur le $z$-problème original (4.2.1$a$)-(4.2.1$c$), car l'application $\Phi_2$ : $f \to u(f)$, correspondant à ce problème est linéaire.

**Unicité dans le problème inverse linéaire :** Soit $\{u = u(f)\}$ la solution du $u$-problème (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$). Sous les hypothèses $(H_i), (H_{ii})$ ,et $(H_{iii})$, l'implication suivante est-elle vraie

$$u(f)|_{\Sigma_1} \Rightarrow f = 0 \text{ sur } \Omega.$$

**Stabilité dans le problème inverse linéaire :** Sous les hypothèses $(H_i), (H_{ii})$ ,et $(H_{iii})$, est-il possible

d'estimer $f\mid_{\Omega}$ à partir de la connaissance de la traces de Dirichlet $u(f)\mid_{\Sigma_1}$ ?

## 4.3 Résultats principaux

Les résultats principaux sont les théorèmes suivants.

**Théorème 4.3.1** *(Unicité du problème inverse linéaire) Supposons que les hypothèses* $(H_i), (H_{ii})$, *et* $(H_{iii})$ *soient vraie. Soit*

$$T > 0. \tag{4.3.1}$$

*Pour le u-problème* (4.2.3*a*)-(4.2.3*c*), *supposons*

$$\begin{gathered} q \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad f \in W^{1,\infty}(\Omega), \ R, R_t, R_{tt} \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \\ R_{x_j}\left(.,\tfrac{T}{2}\right), R_{x_jx_k}\left(.,\tfrac{T}{2}\right), R_{x_jx_kx_l}\left(.,\tfrac{T}{2}\right) \in L^{\infty}(\Omega), \qquad 1 \leq \ j,k,l \leq n, \end{gathered} \tag{4.3.2}$$

$$fR, \ fR_t, \ fR_{tt} \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \tag{4.3.3}$$

$$\left|R\left(x,\frac{T}{2}\right)\right| \geq r > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \ \textit{pour une constante } r. \tag{4.3.4}$$

*Si*

$$u(f)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{4.3.5}$$

*alors*

$$f(x) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{4.3.6}$$

**Théorème 4.3.2** *(Stabilité du problème inverse linéaire) Considérons le u-problème* (4.2.3*a*)-(4.2.3*c*), *sous les hypothèses* $(H_i), (H_{ii})$, *et* $(H_{iii})$, (4.3.1), (4.3.2) ,*et* (4.3.4).*Alors il existe une constante* $C = C(\Omega, T, \Gamma_1, \varphi, q, R) > 0$, *telle que*

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq C\{\|u_t\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|u_{tt}\|_{L^2[\Sigma_1]}\}, \tag{4.3.7}$$

**Théorème 4.3.3** *(Unicité pour le problème inverse non linéaire) Supposons que les hypothèses* $(H_i), (H_{ii})$, *et* $(H_{iii})$ *soient vraies. Considérons le z-problème* (4.2.1*a*)-(4.2.1*c*) *sur* $[0,T]$, *avec* $T > 0$ *comme dans* (4.3.1), *une fois avec coefficient de potentiel* $q$ *et une fois avec coefficient de potentiel* $p$. *Supposons en plus la régularité*

$$q, \ p \in W^{1,\infty}(\Omega). \tag{4.3.8}$$

*Soit* $z$ *la solution du z-problème correspondant* (4.2.1*a*)-(4.2.1*c*), *tel que*

$$z, z_t, z_{tt} \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \tag{4.3.9}$$

$$z_{0x_i}, \ z_{0x_ix_j}, \ z_{0x_ix_jx_k} \in L^{\infty}(\Omega), \qquad 1 \leq \ i,j,k \leq n, \tag{4.3.10}$$

$$|z_0(x)| \geq r \ > 0, \qquad x \in \overline{\Omega.} \tag{4.3.11}$$

*Si*

$$z(q)(x,t) = z(p)(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{4.3.12}$$

*alors*

$$q(x) = p(x), \qquad x \in \Omega. \tag{4.3.13}$$

**Théorème 4.3.4** *(Stabilité du problème inverse non linéaire) Considérons le z-problème* (4.2.1$a$)-(4.2.1$c$) *sur* $[0.T]$*, avec* $T > 0$ *comme dans* (4.3.1)*, une fois avec coefficient de potentiel* $q \in W^{1.\infty}(\Omega)$ *et une fois avec coefficient de potentiel* $p \in W^{1.\infty}(\Omega)$*, et soit* $z(q)$, $z(p) \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right)$ *les solutions correspondantes. On suppose que les hypothèses* $(H_i), (H_{ii}), (H_{iii})$, (4.3.9), (4.3.10) *,et* (2.2.1) *soient satisfaite. Alors il existe une constante* $C = C\left(\Omega, T, \Gamma_1, \varphi, \|q\|_{L^\infty(\Omega)}, z_0, g\right) > 0$*, telle que*

$$\|q - p\|_{H^1(\Omega)} \leq C\{\|z_t(q)(x,t) - z_t(p)(x,t)\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|z_{tt}(q) - z_{tt}(p)\|_{L^2[\Sigma_1]}\}. \tag{4.3.14}$$

## 4.4 Unicité du problème inverse dans le cas linéaire

Les preuves données dans ce paragraphe sont basées sur l'estimation de Carleman (2.2.22) pour l'équation de Schrödinger.

**Démonstration du théorème** 4.3.1

**Étape 1.** On revient à (4.2.3$a$) pour $u = u(f)$, c'est-à-dire on considère l'équation

$$iu_t(x,t) + \Delta u(x,t) = q(x)\, u(x,t) + f(x)\, R(x,t). \tag{4.4.1}$$

En faisant correspondre (4.4.1) avec (2.2.20), on trouve

$$F^{(u)}(x,t) = f(x)\, R(x,t) \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right). \tag{4.4.2}$$

De l'hypothèses (4.3.3), on a $F^{(u)} \in L^2\left(0,T,H^1(\Omega)\right)$. On applique donc le Theorem 2.2.3, i.e l'estimation de Carleman (2.2.22) à (4.4.1), (4.4.2) et on obtient

$$\begin{aligned} &B|_\Sigma(u) + 4\int_Q e^{2\tau\varphi} |f(x)\, R(x,t)|^2 \, dQ \\ &\geq \widetilde{C}_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[|\nabla u|^2\right] dQ + \widetilde{C}_{2,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dQ - C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta} \left[E_u(0) + E_u(T)\right], \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

$\widetilde{C}_{1,\tau}$ et $\widetilde{C}_{2,\tau}$ sont définies dans (2.2.23), et le terme frontière $B|_\Sigma(u)$ est donné comme dans (2.2.25).

On a

$$B|_\Sigma(u) = 0, \tag{4.4.4}$$

car $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0$ par (4.2.3$c$), et $u|_{\Sigma_1} = 0$ par (4.3.5). Insérant (4.4.4) dans (4.4.3), on trouve l'estimation suivante, pour tout $\tau$ suffisamment grand

$$\begin{aligned} &\widetilde{C}_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |\nabla u|^2 \right] dQ + \widetilde{C}_{2,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dQ \\ &\leq 4 \int_Q e^{2\tau\varphi} |f(x) R(x,t)|^2 \, dQ + C_{d;T} \tau e^{-2\tau\delta} \left[ E_u(0) + E_u(T) \right]. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

**Étape 2.** On dérive le $u$-problème (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$) par rapport à $t$, on trouve

$$i (u_t)_t (x,t) + \Delta (u_t)(x,t) = q(x) u_t(x,t) + f(x) R_t(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{4.4.6a}$$

$$(u_t)\left(., \frac{T}{2}\right) = -i \, f(.) R\left(., \frac{T}{2}\right) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.4.6b}$$

$$\frac{\partial (u_t)}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{4.4.6c}$$

Par (4.4.6$c$) et $(u_t)|_{\Sigma_1} = 0$ (voir (4.3.5)), on a

$$B|_{\Sigma}(u_t) = 0. \tag{4.4.7}$$

De (4.3.3), $F^{(u_t)}(.,.) = f(.) R_t(.,.) \in L^2\left(0, T, H^1(\Omega)\right)$, donc on applique le théorème 2.2.3 à $u_t$-équation (4.4.6$a$), et on obtient la contrepartie de l'estimation (4.4.5) avec le changement de $u$ par $u_t$, pour tout $\tau$ suffisamment grand

$$\begin{aligned} &\widetilde{C}_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |\nabla u_t|^2 \right] dQ + \widetilde{C}_{2,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} |u_t|^2 \, dQ \\ &\leq 4 \int_Q e^{2\tau\varphi} |f(x) R_t(x,t)|^2 \, dQ + C_{d;T} \tau e^{-2\tau\delta} \left[ E_{u_t}(0) + E_{u_t}(T) \right]. \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

**Étape 3.** On dérive à nouveau le $u_t$-problème (4.4.6$a$)-(4.4.6$c$) par rapport à $t$, on trouve

$$i (u_{tt})_t (x,t) + \Delta (u_{tt})(x,t) = q(x) u_{tt}(x,t) + f(x) R_{tt}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{4.4.9a}$$

$$(u_{tt})\left(., \frac{T}{2}\right) = \Delta\left(f(.) R\left(., \frac{T}{2}\right)\right) - q(.) f(.) R\left(., \frac{T}{2}\right) - i \, f(.) R_t\left(., \frac{T}{2}\right) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.4.9b}$$

$$\frac{\partial (u_{tt})}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{4.4.9c}$$

On pose $F^{(u_{tt})}(x,t) = f(x) R_{tt}(x,t)$, On note que, par (4.3.2), on a $(u_{tt})\left(., \frac{T}{2}\right) \in H^{-1}(\Omega)$ et non dans $H^1(\Omega)$.

**Orientation.** Comme la condition initiale dans (4.4.9$b$) est très irrégulière, on montre dans un premier temps le théorème 4.3.1 sous la contrainte temporaire suivante

$$f(.) R\left(., \frac{T}{2}\right) \in H^3(\Omega), \tag{4.4.10}$$

pour laquelle la solution

$$(\ u_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right)\in H^{1}(\Omega) \tag{4.4.11}$$

$$u_{tt}\in C\left([0,T],H^{1}(\Omega)\right).$$

(4.4.10) est satisfaite pour

$$f(.)\in H^{3}(\Omega),\ \text{et}\ R\left(.,\frac{T}{2}\right)\ \text{est un multiplicateur sur}\ H^{3}(\Omega). \tag{4.4.12}$$

Une caractérisation pour (4.4.12) est donnée dans ([63], Theorem 1 avec $m=l=3$, $p=2$, p. 243). Des conditions suffisantes pour que (4.4.12) soit vérifiée sont

$$\begin{gathered} f(.)\in H^{3}(\Omega), \\ R_{x_j}\left(.,\tfrac{T}{2}\right),\ R_{x_jx_k}\left(x,\tfrac{T}{2}\right),\ R_{x_jx_kx_l}\left(x,\tfrac{T}{2}\right)\in L^{\infty}(\Omega),\ 1\leq\ j,k,l\leq n. \end{gathered} \tag{4.4.13}$$

Ensuite, Nous étendrons le résultat à tous $f(.)\in W^{1.\infty}(\Omega)$, en utilisant

$(i)$ la continuité de l'application $f\longrightarrow u(f)|_{\Sigma_1}$

$(ii)$ la densité de $H^{3}(\Omega)$ dans $W^{1.\infty}(\Omega)$.

On procède comme dans les étapes 1, et 2 de ci-dessus, vu (4.4.10) et (4.4.11), on applique le théorème 2.2.3 à $u_{tt}$-équation (4.4.9$a$), en tenant compte de (4.4.9$c$) et (4.3.5), on obtient la contrepartie des estimations (4.4.5) et (4.4.8)

$$\begin{aligned} &\widetilde{C}_{1,\tau}\int_{Q}e^{2\tau\varphi}\left[\left|\nabla u_{tt}\right|^{2}\right]dQ+\widetilde{C}_{2,\tau}\int_{Q}e^{2\tau\varphi}\left|u_{tt}\right|^{2}dQ \\ &\leq 4\int_{Q}e^{2\tau\varphi}\left|f(x)R_{tt}(x,t)\right|^{2}dQ+C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_{u_{tt}}(0)+E_{u_{tt}}(T)\right], \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

pour tout $\tau$ suffisamment grand.

**Étape 4.** En supposant (4.3.2), avec $f\in H^{3}(\Omega)$, additionons (4.4.5), (4.4.8) et (4.4.14) pour obtenir le résultat suivant.

$$\begin{aligned} &\widetilde{C}_{1,\tau}\int_{Q}e^{2\tau\varphi}\left[\left|\nabla u\right|^{2}+\left|\nabla u_{t}\right|^{2}+\left|\nabla u_{tt}\right|^{2}\right]dQ \\ &+\widetilde{C}_{2,\tau}\int_{Q}e^{2\tau\varphi}\left[\left|u\right|^{2}+\left|u_{t}\right|^{2}+\left|u_{tt}\right|^{2}\right]dQ \\ &\leq 4\int_{Q}e^{2\tau\varphi}\left[\left|fR\right|^{2}+\left|fR_{t}\right|^{2}+\left|fR_{tt}\right|^{2}\right]dQ+ \\ &C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_{u}(0)+E_{u}(T)+E_{u_{t}}(0)+E_{u_{t}}(T)+E_{u_{tt}}(0)+E_{u_{tt}}(T)\right], \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

pour tout $\tau$ suffisamment grand.

**Étape 5.** On simplifie le terme intégral à droite de l'estimation (4.4.15).

**Proposition 4.4.1** *Pour le terme intégral du membre droit de* (4.4.15)*, on a*

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR|^2+|fR_t|^2+|fR_{tt}|^2\right]dQ\\
&\leq C_R\{\left[\left(\frac{T}{r^2}\right)(2cT\tau+1)\right]\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_t(x,s)\right|^2 dsd\Omega\\
&\quad+\left(\frac{T}{r^2}\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}(x,s)\right|^2 dsd\Omega+\frac{T}{r^2}\int_\Omega\left|u_t(x,0)\right|^2 d\Omega.
\end{aligned}\tag{4.4.16}$$

**Preuve de la proposition 4.4.1**

*Étape i.* En supposant (4.3.2) sur $R, R_t, R_{tt}\in L^\infty(Q)$, on a

$$\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR|^2+|fR_t|^2+|fR_{tt}|^2\right]dQ\leq C_R\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|f|^2\right]dQ,$$

avec $C_R$ une constante dépendant des $L^\infty(Q)$-normes de $R, R_t, R_{tt}$.

*Étape ii.* De (4.2.3$a$), et (4.2.3$b$), on trouve

$$iu_t\left(x,\frac{T}{2}\right)=f(x)\,R\left(x,\frac{T}{2}\right).\tag{4.4.17}$$

De (4.3.4) , $\left|R\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|\geq r>0$, alors

$$|f(x)|\leq\frac{1}{r}\left|u_t\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|.\tag{4.4.18}$$

Par (4.4.18), et en utilisant la propriété (2.2.8) et (2.2.5) i.e $\frac{d}{ds}\varphi(x,s)=2c\left(\frac{T}{2}-s\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_Q e^{2\tau\varphi}|f|^2\,dQ&=\int_0^T\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,t)}|f(x)|^2\,d\Omega dt\\
&\leq\frac{1}{r^2}\int_0^T\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,t)}\left|u_t\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|^2 d\Omega dt\leq\frac{T}{r^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi\left(x,\frac{T}{2}\right)}\left|u_t\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|^2 d\Omega\\
&\leq\frac{T}{r^2}\left(\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{d}{ds}\left(e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_t(x,s)\right|^2\right)dsd\Omega+\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_t(x,0)\right|^2 d\Omega\right)\\
&\leq\frac{T}{r^2}(4c\tau\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{T}{2}-s\right)e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_t(x,s)\right|^2 dsd\Omega+\\
&\quad 2\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_t(x,s)\right|\left|u_{tt}(x,s)\right|dsd\Omega+\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_t(x,0)\right|^2 d\Omega)?
\end{aligned}\tag{4.4.19}$$

par utilisation de l'inégalité de Young (corollaire A.2, annexe A), et puisque $\left(\frac{T}{2}-s\right)\leq\frac{T}{2}$,on a

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left|f\right|^2dQ &\leq \frac{T}{r^2}\{(2cT\tau)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi}\left|u_t\right|^2dtd\Omega+\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi}\left|u_t\right|^2+\left|u_{tt}\right|^2dtd\Omega\\ &\quad+\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_t\left(x,0\right)\right|^2d\Omega\}\\ &\leq \frac{T}{r^2}\left(2cT\tau+1\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_t\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega\\ &\quad+\frac{T}{r^2}\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}\left(x,s\right)\right|^2dsd\Omega+\frac{T}{r^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_t\left(x,0\right)\right|^2d\Omega, \qquad (4.4.20)\end{aligned}$$

(4.4.16) est alors une conséquence de (4.4.20) et (2.2.9).

**Étape 6**. En insérant l'estimation (4.4.16) dans(4.4.15), on obtient l'estimation suivante pour le $u$-problème (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$) dans la proposition suivante.

**Proposition 4.4.2** *Sous les hypothèses du théorème 4.3.1, avec $f\in H^3\left(\Omega\right)$. Alors, l'estimation suivante est vraie pour le u-problème* (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$) , *pour tout $\tau>0$ grand*

$$\begin{aligned}&\widetilde{C}_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[\left|\nabla u\right|^2+\left|\nabla u_t\right|^2+\left|\nabla u_{tt}\right|^2\right]dQ\\ &+K_{2,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[\left|u\right|^2+\left|u_t\right|^2+\left|u_{tt}\right|^2\right]dQ\\ &\leq C_R\left(\frac{T}{r^2}\right)\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_t\left(x,0\right)\right|^2d\Omega+\\ &C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_u\left(0\right)+E_u\left(T\right)+E_{u_t}\left(0\right)+E_{u_t}\left(T\right)+E_{u_{tt}}\left(0\right)+E_{u_{tt}}\left(T\right)\right], \qquad (4.4.21)\end{aligned}$$

*pour tout $\tau>0$ grand, où*

$$K_{2,\tau}=\widetilde{C}_{2,\tau}-C_R\left(\frac{T}{r^2}\right)\left(2cT\tau+1\right)-C_R\left(\frac{T}{r^2}\right),$$

**Étape 7**. A partir de (2.2.23), on remarque que tous les coefficients des termes intégraux du membre gauche de l'estimation (4.4.21) sont positifs pour $\tau>0$ suffisamment grand, alors

$$\begin{aligned}&K_{2,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[\left|u\right|^2+\left|u_t\right|^2+\left|u_{tt}\right|^2\right]dQ\\ &\leq C_R\left(\frac{T}{r^2}\right)\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_t\left(x,0\right)\right|^2d\Omega+\\ &C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_u\left(0\right)+E_u\left(T\right)+E_{u_t}\left(0\right)+E_{u_t}\left(T\right)+E_{u_{tt}}\left(0\right)+E_{u_{tt}}\left(T\right)\right]\\ &\leq Const_{u,data}, \qquad (4.4.22)\end{aligned}$$

où $Const_{u,data}$ est une constante dépendant des données $R$, $T$, $u$, $r$, $\delta$, $d$, mais pas de $\tau$.

**Étape 8**. On note encore que de (2.2.10)), (4.4.22) implique

$$\begin{aligned} & K_{2,\tau} e^{2\tau\sigma} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 \right] dQ \\ & \leq K_{2,\tau} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} e^{2\tau\varphi} \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 \right] dQ \\ & \leq K_{2,\tau} \int_{0}^{T} \int_{\Omega} e^{2\tau\varphi} \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 \right] dQ \\ & \leq Const_{u,data}, \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

pour $\tau \to +\infty$ dans (4.4.23), et puisque $K_{2.\tau}$ est d'ordre $\tau^3$, alors (4.4.23) implique

$$u(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \Omega \times [t_0, t_1]. \tag{4.4.24}$$

En particulier

$$f(x) R\left(x, \frac{T}{2}\right) = i u_t\left(x, \frac{T}{2}\right) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4.4.25}$$

Enfin, on a $\left|R\left(x, \frac{T}{2}\right)\right| \geq r > 0$ (voir (4.3.4)), alors (4.4.25) implique

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.4.26}$$

**Étape 9.** Par les hypothèses (4.3.2), pour le $u$-problème(4.2.3$a$)-(4.2.3$c$), l'application

$$\begin{aligned} W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^1(\Omega)\right) \\ f &\to u \end{aligned}$$

est continue. Par la théorie des traces, l'application

$$\begin{aligned} & \Upsilon : W^{1,\infty}(\Omega) \to C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right) \\ & f \to \Upsilon f = \left\{ u|_{\Sigma_1} \right\}. \end{aligned} \tag{4.4.27}$$

est continue.

Puisque $H^3(\Omega)$ est dense dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, la conclusion (4.4.26) de $\Upsilon f = 0$ pour $f \in H^3(\Omega)$, peut être étendue via (4.4.27) à $\Upsilon f = 0$ pour tout $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$. La preuve du théorème 4.3.1 est terminée.

## 4.5 Unicité du problème inverse dans le cas non linéaire

**Démonstration du théorème 4.3.3**

La preuve du théorème 4.3.3 (unicité du problème inverse non linéaire) pour le $z$-problème (4.2.1$a$)-(4.2.1$c$)

est une conséquence directe du théorème 4.3.1 (unicité du problème inverse linéaire) pour le $u$-problème $(4.2.3a)$-$(4.2.3c)$.

De (4.2.2), on a

$$\begin{aligned} f(x) &= q(x) - p(x), \\ R(x,t) &= z(p)(x,t), \\ u(x,t) &= z(q)(x,t) - z(p)(x,t). \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Les hypothèses (4.3.9) , (4.3.10) , et (4.3.8) du théorème 4.3.3 implique les hypothèses (4.3.2) ,et (4.3.3) dans le théorème 4.3.1. De plus, l'hypothèse (4.3.11) du théorème 4.3.3 implique l'hypothèse (4.3.4) dans le théorème 4.3.1.

Maintenant, pour

$$z(q)(x,t) = z(p)(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{4.5.2}$$

on a, par (4.5.1)

$$u(f)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{4.5.3}$$

D'après le théorème 4.3.1, on obtient

$$f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.5.4}$$

ceci donne

$$q(x) = p(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.5.5}$$

## 4.6 Inégalité d'observabilité

L'inégalité d'observabilité et l'argument de compacité-unicité jouent un rôle important dans la preuve du théorème 4.3.2 (stabilité du problème inverse linéaire). Dans ce paragraphe, on va énoncer une inégalité d'observabilité pour le problème suivant

$$iy_t(x,t) + \Delta y(x,t) = q(x)y(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{4.6.1a}$$

$$y(.,\frac{T}{2}) = y_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.6.1b}$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \tag{4.6.1c}$$

où

$$y_0 \in H^1(\Omega), \ q \in L^{\infty}(\Omega). \tag{4.6.2}$$

La solution de (4.6.1$a$)-(4.6.1$c$) satisfait

$$y \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right). \tag{4.6.3}$$

**Théorème 4.6.1** *([46], théorème 8.4) Supposons les hypothèses* $(H_i), (H_{ii}), (H_{iii})$, *et* (4.6.2). *Soit* $y$ *la solution de l'équation* (4.6.1$a$) *satisfaisant* (4.6.1$c$). *Alors, il existe une constante* $C = C(\Omega, T, q) > 0$ *telle que*

$$\|y_0\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_T \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[|y|^2 + |y_t|^2\right] d\Gamma_1 dt, \tag{4.6.4}$$

*ici,* $T > 0$, $\Gamma_1$ *est la partie contrôlée ou observée de la frontière.*

## 4.7 Stabilité du problème inverse dans le cas linéaire

**Démonstration du théorème 4.3.2**

**Étape 1.** Considérons le $u_t$-problème (4.4.6$a$)-(4.4.6$c$), avec les données (4.3.2) et (4.3.4) c'est-à-dire

$$i(u_t)_t(x,t) + \Delta(u_t)(x,t) = q(x)\, u_t(x,t) + f(x)\, R_t(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{4.7.1a}$$

$$(u_t)\left(.,\frac{T}{2}\right) = -i\ f(.)\, R\left(.,\frac{T}{2}\right) \in H^1(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.7.1b}$$

$$\frac{\partial(u_t)}{\partial \nu}|_\Sigma = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{4.7.1c}$$

Posons

$$u_t = \hat{u}_t + \tilde{u}_t, \tag{4.7.2}$$

où

$$i(\hat{u}_t)_t(x,t) + \Delta(\hat{u}_t)(x,t) = q(x)\, \hat{u}_t(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{4.7.3a}$$

$$(\hat{u}_t)\left(.,\frac{T}{2}\right) = -i\ f(.)\, R\left(.,\frac{T}{2}\right) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.7.3b}$$

$$\frac{\partial(\hat{u}_t)}{\partial \nu}|_\Sigma = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{4.7.3c}$$

et

$$i(\tilde{u}_t)_t(x,t) + \Delta(\tilde{u}_t)(x,t) = q(x)\, \tilde{u}_t(x,t) + f(x)\, R_t(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{4.7.4a}$$

$$(\tilde{u}_t)\left(.,\frac{T}{2}\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.7.4b}$$

$$\frac{\partial(\tilde{u}_t)}{\partial \nu}|_\Sigma = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{4.7.4c}$$

**Étape 2.** Compte tenu des hypothèses (4.6.2), on applique l'inégalité d'observabilité (4.6.4) au $\hat{u}_t$-problème

$(4.7.3a)$-$(4.7.3c)$, et on obtient

$$\left\| -i\ f(.)\ R\left(.,\frac{T}{2}\right)\right\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C^2_{T,q}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[\hat{u}_t^2+\hat{u}_{tt}^2\right]d\Gamma_1 dt, \tag{4.7.5}$$

puisque $\left|R\left(x,\frac{T}{2}\right)\right| \geq r>0$, pour $x\in\overline{\Omega}$, (voir (4.3.4)). En utilisant (4.7.2), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|f\|_{H^1(\Omega)}\\
&\leq C_{T,q,r}\left\{\|\hat{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)}+\|\hat{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}\\
&\leq C_{T,q,r}\left\{\|u_t-\tilde{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)}+\|u_{tt}-\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}\\
&\leq C_{T,q,r}\left\{\|u_t\|_{L^2(\Sigma_1)}+\|u_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}+\|\tilde{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)}+\|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\},
\end{aligned} \tag{4.7.6}$$

**Étape 3.** On élimine le terme $\left\{\|\tilde{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)}+\|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}$ par l'argument de compacité-unicité.

**Lemme 4.7.1** *Considérons le $\tilde{u}_t$-problème $(4.7.4a)$-$(4.7.4c)$ avec les données*

$$q\in W^{1.\infty}(\Omega),\quad f\in W^{1.\infty}(\Omega),\ R,R_t,R_{tt}\in C\left([0,T],H^1(\Omega)\right). \tag{4.7.7}$$

*Définissons les opérateurs $K$, et $L$ comme suit*

$$\begin{cases} K: W^{1.\infty}(\Omega)\to L^2(\Sigma_1), K\{f\}=\tilde{u}_t|_{\Sigma_1}\\ L: W^{1.\infty}(\Omega)\to L^2(\Sigma_1),\ L\{f\}=\tilde{u}_{tt}|_{\Sigma_1}\end{cases} \tag{4.7.8}$$

*Alors*

$$K,\ \text{et } L \text{ sont des opérateurs compacts.} \tag{4.7.9}$$

**Preuve de lemme 4.7.1**

*Étape $i$.* Des hypothèses (4.7.7), on a la régularité suivante pour le $\tilde{u}_t$-problème $(4.7.4a)$-$(4.7.4c)$

$$\tilde{u}_t\in C\left([0,T],H^1(\Omega)\right). \tag{4.7.10}$$

Après cela, nous dérivons le $\tilde{u}_t$-problème $(4.7.4a)$-$(4.7.4c)$ par rapport à $t$, on trouve le $\tilde{u}_{tt}$-problème

$$i\left(\tilde{u}_{tt}\right)_t(x,t)+\Delta\left(\tilde{u}_{tt}\right)(x,t)=q(x)\,\tilde{u}_{tt}(x,t)+f(x)\,R_{tt}(x,t)\quad \text{dans } Q, \tag{4.7.11a}$$

$$\left(\tilde{u}_{tt}\right)\left(.,\frac{T}{2}\right)=-if(x)\,R_t\left(x,\frac{T}{2}\right)\quad \text{dans } \Omega, \tag{4.7.11b}$$

$$\frac{\partial\left(\tilde{u}_{tt}\right)}{\partial\nu}|_{\Sigma}=0\quad \text{sur } \Sigma. \tag{4.7.11c}$$

Des hypothèses (4.7.7), on obtient aussi la régularité suivante pour le $\tilde{u}_{tt}$-problème

$$\tilde{u}_{tt} \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right). \tag{4.7.12}$$

*Étape ii.* Sous les hypothèses (4.7.7), (4.7.10) pour le $\tilde{u}_t$-problème (4.7.4$a$)-(4.7.4$c$), l'application

$$\begin{aligned} W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \\ f &\to \tilde{u}_t \end{aligned} \tag{4.7.13}$$

est continue. Ainsi, par la théorie des traces, l'application

$$\begin{aligned} &\Upsilon_1 : \ W^{1,\infty}(\Omega) \to C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ &f \to \Upsilon_1 f = \tilde{u}_t \mid_{\Sigma} \end{aligned} \tag{4.7.14}$$

est continue. Aussi, sous les hypothèses (4.7.7), (4.7.12) pour le $\tilde{u}_{tt}$-problème (4.7.11$a$)-(4.7.11$c$), l'application

$$\begin{aligned} W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \\ f &\to \tilde{u}_{tt} \end{aligned} \tag{4.7.15}$$

est continue. Par la théorie des traces, l'application

$$\begin{aligned} &\Upsilon_2 : \ W^{1,\infty}(\Omega) \to C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ &f \to \Upsilon_2 f = \tilde{u}_{tt} \mid_{\Sigma} \end{aligned} \tag{4.7.16}$$

est continue.

*Étape iii.* Ainsi, puisque $R_t \in L^\infty(Q)$, on déduit de (4.7.14) que

$$\left\|\tilde{u}_t(f)\right\|_{C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_R \|f\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.7.17}$$

De même, à partir de (4.7.16), où $R_t$ , $R_{tt} \in L^\infty(Q)$, on a

$$\left\|\tilde{u}_{tt}(f)\right\|_{C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_R \left(\|f\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{4.7.18}$$

*Étape iv.* Compacité de $K$, et $L$. on voit par (4.7.17) et (4.7.18), que

$$\begin{aligned} K &: W^{1.\infty}(\Omega) \to L^2(\Sigma_1), (Kf)(x,t) = \tilde{u}_t(x,t)|_{\Sigma_1} \\ L &: W^{1.\infty}(\Omega) \to L^2(\Sigma_1), (Lf)(x,t) = \tilde{u}_{tt}(x,t)|_{\Sigma_1} \\ &\text{sont des opérateurs compacts,} \end{aligned} \tag{4.7.19}$$

car l'injection (embedding) $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ est compact, via (théorème A.2, annexe A). Ceci termine la preuve du lemme 4.7.1.

**Étape 4.** On utilise (4.7.9) pour éliminer les termes $\|\tilde{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)}$, $\|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}$ dans l'estimation (4.7.6), via l'argument de compacité-unicité.

Supposons au contraire que l'inégalité (4.3.7) n'est pas satisfaite. Alors, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1} \in W^{1.\infty}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, tel que

$$\|f_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad n \geq 1, \tag{4.7.20a}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_t(f_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}(f_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} = 0. \tag{4.7.20b}$$

De (4.7.20$a$), il existe une sous-suite, encore notée $f_n$, telle que

$$f_n \text{ converge faiblement dans } H^1(\Omega) \text{ vers } f_0 \in W^{1.\infty}(\Omega). \tag{4.7.21}$$

Par (4.7.9), on a

$$\lim_{m,n\to+\infty} \|Kf_n - Kf_m\|_{L^2(\Sigma_1)} = \lim_{m,n\to+\infty} \|Lf_n - Lf_m\|_{L^2(\Sigma_1)} = 0. \tag{4.7.22}$$

Aussi, à partir de (4.7.6), et de la linéarité de l'application $f \to u(f)$, on trouve

$$\begin{aligned} &\|f_n - f_m\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_{T,q,r}\left\{\|u_t(f_n) - u_t(f_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}(f_n) - u_{tt}(f_m)\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\} + \\ &C_{T,q,r}\left\{\|Kf_n - Kf_m\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|Lf_n - Lf_m\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\} \\ &\leq C\left\{\|u_t(f_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}(f_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_t(f_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}(f_m)\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\} + \\ &C_{T,q,r}\left\{\|Kf_n - Kf_m\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|Lf_n - Lf_m\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}, \end{aligned} \tag{4.7.23}$$

alors, par (4.7.20$b$) et (4.7.22), on trouve que

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_{H^1(\Omega)} = 0. \tag{4.7.24}$$

Par unicité de la limite, et par (4.7.21), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f_0\|_{H^1(\Omega)} = 0. \tag{4.7.25}$$

Ainsi, compte tenu de (4.7.20$a$), (4.7.25) implique

$$\|f_0\|_{H^1(\Omega)} = 1. \tag{4.7.26}$$

On revient au $u$-problème (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$). De (4.4.27), on trouve que

$$\|u(f)\|_{C\left([0,T],\, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_R\left(\|f\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{4.7.27}$$

via (plongement) $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma)$, alors

$$\|u(f)\|_{C([0,T],\, L^2(\Gamma))} \leq C_R\left(\|f\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{4.7.28}$$

Comme l'application $f \to u(f)|_{\Sigma}$ est linéaire, de (4.7.28) et car $f_n$, $f_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, on a

$$\|u(f_n) - u(f_0)\|_{C([0,T],\, L^2(\Gamma_1))} \leq C_R\left(\|f_n - f_0\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{4.7.29}$$

(4.7.25) avec (4.7.29), donnent

$$\lim_{n\to+\infty} \|u(f_n) - u(f_0)\|_{C([0,T],L^2(\Gamma_1))} = 0. \tag{4.7.30}$$

On a de même, pour le $u_t$-problème 4.7.1$a$-(4.7.1$c$)

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_t(f_n) - u_t(f_0)\|_{C([0,T],L^2(\Gamma_1))} = 0. \tag{4.7.31}$$

Alors, grâce à (4.7.20$b$), combiné avec (4.7.31), on obtient pour $t \in [0,T]$

$$u_t(f_0)\,|_{\Sigma_1} = 0. \tag{4.7.32}$$

considérons le $u$-problème (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$) avec $f = f_n$, alors

$$u(f_n)\left(., \frac{T}{2}\right) = 0,\ x \in \overline{\Omega}, \tag{4.7.33}$$

et donc

$$u(f_n)\left(., \frac{T}{2}\right) = 0,\ x \in \Gamma_1, \tag{4.7.34}$$

au sens de traces dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, (4.7.34) combiné avec (4.7.30) donnent

$$u(f_0)\left(.,\frac{T}{2}\right)=0,\ x\in\Gamma_1, \tag{4.7.35}$$

et ensuite, en vertu de (4.7.32), la conclusion souhaitée

$$u(f_0)=0,\qquad (x,t)\in\Sigma_1. \tag{4.7.36}$$

Ici, $u(f_0)$ solution de problème (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$) avec $f_0=f$

En appliquant le théorème 4.3.1, on obtient

$$f_0(x)=0,\quad x\in\ \Omega. \tag{4.7.37}$$

(4.7.37) contredit (4.7.26). La preuve du théorème 4.3.2 est donc achevée.

## 4.8 Stabilité du problème inverse dans le cas non linéaire

**Démonstration du théorème 4.3.4**

On termine ce chapitre par la preuve du théorème 4.3.4 (stabilité du problème inverse non linéaire) pour le $z$-problème (4.2.1$a$)-(4.2.1$c$) qui est une conséquence directe du théorème 4.3.2 (stabilité du problème inverse linéaire) pour le $u$-problème (4.2.3$a$)-(4.2.3$c$).

De (4.5.1) , et puisque $q,p\in W^{1,\infty}(\Omega)$ , $z(p)\in C\left([0,T],H^1(\Omega)\right)$ , donc $f\in W^{1,\infty}(\Omega)$ , $R\in C\left([0,T],H^1(\Omega)\right)$ . Ainsi, on peut appliquer le théorème 4.3.2, à $u=z(q)-z(p)$, et on obtient l'estimation de stabilité souhaitée (4.3.14), c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\|q-p\|_{H^1(\Omega)}\\&\leq C\left\{\|z_t(q)(x,t)-z_t(p)(x,t)\|_{L^2[\Sigma_1]}+\|z_{tt}(q)-z_{tt}(p)\|_{L^2[\Sigma_1]}\right\}.\end{aligned} \tag{4.8.1}$$

# Chapitre 5

# Problème inverse pour un système couplé ondes-Schrödinger

**Résumé**

Ce chapitre concerne le problème inverse de la récupération de deux coefficients de potentiel inconnus pour un système couplé ondes-Schrödinger dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, avec donnée de Neumann non homogène à partir d'une mesure aux limites de Dirichlet dépendante du temps. On montre l'unicité et la stabilité de Lipschitz pour ce problème inverse sous certaines hypothèses de convexité sur la géométrie du domaine $\Omega$ et sous certaines conditions de régularité sur les données. La démonstration est basée sur les estimations de Carleman pour les équations hyperboliques du second ordre et pour l'équation de Schrödinger et sur l'inégalité d'observabilité pour le système homogène correspondant.

## 5.1 Énoncé du problème

On considère le système couplé ondes-Schrödinger suivant

$$w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) = q(x) z(x,t) \qquad \text{dans } Q, \tag{5.1.1a}$$

$$iz_t(x,t) + \Delta z(x,t) = p(x) w(x,t) \qquad \text{dans } Q, \tag{5.1.1b}$$

$$w(x, \frac{T}{2}) = w_0(x), w_t(x, \frac{T}{2}) = w_1(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{5.1.1c}$$

$$z(x, \frac{T}{2}) = z_0(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{5.1.1d}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu} = g_1(x,t), \frac{\partial z(x,t)}{\partial \nu} = g_2(x,t) \quad \text{sur } \Sigma, \tag{5.1.1e}$$

où les conditions initiales $w_0(x)$, $w_1(x)$, $z_0(x)$ et les conditions aux limites de Neumann $g_1(x,t)$, $g_2(x,t)$ sont données, alors que les potentiels $q(.)$, $p(.)$ sont des coefficients inconnus indépendants du temps.

Il existe plusieurs modèles physiques qui sont mathématiquement modélisés par des systèmes couplés ondes-Schrödinger par exemple le système couplé de Yukawa qui décrit l'interaction entre les électrons et les phonons ([65]), l'équation de Schrödinger-Baussensk décrivant la propagation non linéaire des ondes de Langmuir et des ondes de poussière acoustique couplées dans un plasma poussiéreux multicomposé ([64]), le système couplé de Klein-Gordon-Schrödinger qui décrit l'interaction d'un champ de nucléons et d'un champ de mésons par couplage de Yukawa ([74]), etc ....

Ce chapitre traite le problème inverse qui consiste à déterminer les potentiels $q$, $p$ à partir des traces de Dirichlet $w$ et $z$ sur la partie observée $\Sigma_1$. On montre l'unicité et la stabilité de Lipschitz pour le problème inverse non linéaire caractérisé par l'application non linéaire $\{q,p\}|_\Omega \to \{w,z\}|_\Sigma$. Plus précisément, on répond aux questions suivantes.

**Unicité dans le problème inverse non linéaire**

Soit $\{w = w(q,p), z = z(q,p)\}$ la solution du $\{w,z\}$-système (5.1.1$a$)-(5.1.1$e$). Sous les hypothèses $(H_i)$, $(H_{ii})$, et $(H_{iii})$, l'implication suivante est elle vraie

$$\begin{cases} w(q_1,p_1)|_{\Sigma_1} = w(q_2,p_2)|_{\Sigma_1} \\ z(q_1,p_1)|_{\Sigma_1} = z(q_2,p_2)|_{\Sigma_1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 = q_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases} \text{ sur } \Omega \ ? \tag{5.1.2}$$

**Stabilité dans le problème inverse non linéaire**

Sous les hypothèses $(H_i)$, $(H_{ii})$, et $(H_{iii})$, est-il possible d'estimer $q_1 - q_2|_\Omega$, $p_1 - p_2|_\Omega$ par $(w(q_1,p_1) - w(q_2,p_2))|_{\Sigma_1}$ et $(z(q_1,p_1) - z(q_2,p_2))|_{\Sigma_1}$ dans des normes appropriées ?

**Problème inverse linéaire correspondant (**Réduction du problème inverse non linéaire en un problème inverse linéaire.

Posons

$$\begin{aligned}
&f(x) = q_1(x) - q_2(x),\ g(x) = p_1(x) - p_2(x),\\
&R_1(x,t) = z(q_2,p_2)(x,t),\ R_2(x,t) \ = w(q_2,p_2)(x,t),\\
&u(x,t) \ = w(q_1,p_1)(x,t) - w(q_2,p_2)(x,t),\\
&\upsilon(x,t) = z(q_1,p_1)(x,t) - z(q_2,p_2)(x,t).
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Alors, après avoir soustrait le $\{w,z\}$-système (5.1.1$a$)-(5.1.1$e$) à coefficients $(q_1,p_1)$ du $\{w,z\}$-système (5.1.1$a$)-(5.1.1$e$) à coefficients $(q_2,p_2)$, on obtient

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = q(x)\,\upsilon(x,t) + f(x)\,R_1(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.1.4a}$$

$$i\upsilon_t(x,t) + \Delta\upsilon(x,t) = p(x)\,u(x,t) + g(x)\,R_2(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.1.4b}$$

$$u\left(.,\frac{T}{2}\right) = 0,\ u_t\left(.,\frac{T}{2}\right) = 0,\ \upsilon\left(.,\frac{T}{2}\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.1.4c}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = 0, \frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \tag{5.1.4d}$$

(bien sûr, $q$ dans (5.1.4$a$) est en fait $q_1$ dans la notation de (5.1.3), tandis que $p$ dans (5.1.4$b$) est en fait $p_1$ dans la notation de (5.1.3)), où, les termes $f$, $g$ sont des coefficients inconnus indépendants du temps.

Le $\{u,\upsilon\}$-système (5.1.4$a$)-(5.1.4$d$) a l'avantage sur le $\{w,z\}$-système original (5.1.1$a$)-(5.1.1$e$) que l'application $\{f,g\} \to \{u,\upsilon\}$ est linéaire. Ici, nous sommes également confrontés à deux problèmes.

**Unicité dans le problème inverse linéaire**

Soit $\{u = u(f,g), \upsilon = \upsilon(f;g)\}$ la solution du $\{u,\upsilon\}$-système (5.1.4$a$)-(5.1.4$d$). Sous les hypothèses $(H_i)$, $(H_{ii})$, et $(H_{iii})$, l'implication suivante est elle vraie

$$\begin{cases} u(f,g)|_{\Sigma_1} = 0 \\ \upsilon(f,g)|_{\Sigma_1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases} \text{ sur } \Omega\ ? \tag{5.1.5}$$

**Stabilité dans le problème inverse linéaire**

Sous les hypothèses $(H_i)$, $(H_{ii})$, et $(H_{iii})$, est-il possible d'estimer $f\,|_\Omega$, $g|_\Omega$ à partir de la connaissance des traces de Dirichlet $u(f,g)|_{\Sigma_1}$ et $\upsilon(f,g)|_{\Sigma_1}$ ?

Notre objectif dans ce chapitre est de donner une réponse affirmative aux questions d'unicité et de stabilité de ci-dessus pour les problèmes inverses linéaires et non linéaires.

## 5.2 Résultats principaux

**Théorème 5.2.1** *(**Unicité du problème inverse linéaire**). Supposons que les hypothèses* $(H_i), (H_{ii}),$ *et* $(H_{iii})$ *sont satisfaites. soit*

$$T > T_0 \equiv 2\sqrt{\max_{x\in\overline{\Omega}} d(x)}. \tag{5.2.1}$$

*Dans le* $\{u, \upsilon\}$*-système (*5.1.4*a*)-(5.1.4*d*), supposons que :*

$$\begin{aligned} &q \in L^{\infty}(\Omega),\ p \in W^{1.\infty}(\Omega),\ \ f \in L^2(\Omega),\ g \in\ W^{1.\infty}(\Omega), \\ &R_1, R_{1t}, R_{1tt} \in L^{\infty}(Q),\ R_2, R_{2t}, R_{2tt} \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \\ &R_{ix_j}\left(.,\frac{T}{2}\right),\ R_{2x_jx_k}\left(.,\frac{T}{2}\right),\ R_{2x_jx_kx_l}\left(.,\frac{T}{2}\right) \in L^{\infty}(\Omega),\quad i=1,2,\quad 1\leq\ j,k,l\leq n, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

$$fR_1,\ fR_{1t},\ fR_{1tt} \in L^2(Q),\ gR_2, gR_{2t}, gR_{2tt}\ \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \tag{5.2.3}$$

$$\left|R_1\left(x,\frac{T}{2}\right)\right| \geq r_1 > 0, \quad \left|R_2\left(x,\frac{T}{2}\right)\right| \geq r_2 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{5.2.4}$$

*avec quelques constantes positives* $r_1$, $r_2$. *Supposons que la solution* $\{u = u(f,g), \upsilon = \upsilon(f,g)\}$ *au système* $(5.1.4a - 5.1.4d)$ *satisfait les propriétés de régularité*

$$u, u_t \in H^{1,1}(Q), \quad \upsilon, \upsilon_t \in C\left([0.T], H^1(\Omega)\right), \tag{5.2.5}$$

*Si*

$$u(f,g)(x,t) = \upsilon(f,g)(x,t) = 0,\ \ (x,t) \in \Sigma_1, \tag{5.2.6}$$

*alors*

$$f(x) = g(x) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{5.2.7}$$

**Théorème 5.2.2** *(**Stabilité du problème inverse linéaire**). Considérons le* $\{u, \upsilon\}$*-système (*5.1.4*a*)-(5.1.4*d*). Supposons que les hypothèses* $(H_i), (H_{ii}),$ $(H_{iii})$, (5.2.1), (5.2.2), *et* (5.2.4) *sont vérifiées. Alors il existe une constante* $C = C(\Omega, T, \Gamma_1, \varphi, q, p, R_1, R_2) > 0$, *c'est-à-dire dépendante des données du problème (*5.1.4*a*)-(5.1.4*d*), mais pas des coefficients inconnus* $f$ *et* $g$, *telle que*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)} \leq C\{\|u_t\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|u_{tt}\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|\upsilon_t\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|\upsilon_{tt}\|_{L^2[\Sigma_1]}\}, \tag{5.2.8}$$

*pour tout* $f \in L^2(\Omega)$, $g \in W^{1.\infty}(\Omega)$.

**Théorème 5.2.3** *(**Unicité du problème inverse non linéaire**). Supposons que les hypothèses* $(H_i), (H_{ii}),$ $(H_{iii})$, *et* (5.2.1)*sont vérifiées, ainsi que*

$$q_1, q_2 \in L^{\infty}(\Omega), \quad p_1, p_2 \in W^{1.\infty}(\Omega). \tag{5.2.9}$$

*Soient* $\{w(q_1,p_1), z(q_1,p_1)\}$, *et* $\{w(q_2,p_2), z(q_2,p_2)\}$ *les solutions du* $\{w,z\}$*-système (*5.1.1$a$*)-*(5.1.1$e$*) correspondantes aux coefficients* $(q_1,p_1)$, $(q_2,p_2)$ *respectivement. Pour les conditions initiales* $\{w_0,w_1,z_0\}$ *et les donnée de Neumann* $g_1,g_2$, *on impose les conditions suivantes*

$$\{w_0,w_1,z_0\} \in D(A^m) \subset H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega), m > \frac{\dim \Omega}{2} + 1, \tag{5.2.10}$$

$$g_1, g_2 \in H^m\left(0,T;L^2(\Gamma)\right) \cap C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}+(m-1)}(\Gamma)\right),\ m > \tfrac{\dim\Omega}{2} + 1. \tag{5.2.11}$$

$$w_{0x_j},\ w_{0x_jx_k}, w_{0x_jx_kx_l} \in L^\infty(\Omega),\ z_{0x_j} \in L^\infty(\Omega)\quad 1 \leq\ j,k,l \leq n, \tag{5.2.12}$$

$$|w_0(x)| \geq w_0 > 0, \qquad |z_0(x)| \geq z_0\ > 0, \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{5.2.13}$$

*où* $A$ *est le générateur analysé comme dans* (5.6.7). *Les régularités* (5.2.10) *et* (5.2.11), *impliquent que*

$$w(q_2,p_2), w_t(q_2,p_2), w_{tt}(q_2,p_2) \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \tag{5.2.14}$$

$$z(q_2,p_2), z_t(q_2,p_2), z_{tt}(q_2,p_2) \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \tag{5.2.15}$$

*Enfin, si*

$$w(q_1,p_1)(x,t) = w(q_2,p_2)(x,t),\ z(q_1,p_1)(x,t) = z(q_2,p_2)(x,t),\ (x,t) \in \Sigma_1. \tag{5.2.16}$$

*Alors*

$$q_1(x) = q_2(x),\ p_1(x) = p_2(x),\ x \in \Omega. \tag{5.2.17}$$

**Théorème 5.2.4** ***(Stabilité du problème inverse non linéaire)****. Supposons que les hypothèses* $(H_i)$, $(H_{ii})$, *et* $(H_{iii})$ *ainsi que* (5.2.10), (5.2.15), (5.2.13), *et* (5.2.11) *sont vérifiées. Considérons le* $\{w,z\}$*-système (*5.1.1$a$*)-*(5.1.1$e$*) sur* $[0.T]$, *avec* $T > T_0$, *une fois avec des coefficients de potentiel* $q_1 \in L^\infty(\Omega)$, $p_1 \in W^{1.\infty}(\Omega)$, *et une fois avec des coefficients de potentiel* $q_2 \in L^\infty(\Omega)$, $p_2 \in W^{1.\infty}(\Omega)$, *et soient* $\{w(q_1,p_1), z(q_1,p_1)\}$, $\{w(q_2,p_2), z(q_2,p_2)\}$ *les solutions correspondantes. Alors il existe une constante* $C = C(\Omega,T,\Gamma_1,\varphi,M,w_0,w_1,z_0,g_1,g_2$ $0$, *telle que*

$$\begin{aligned} &\|q_1 - q_2\|_{L^2(\Omega)} + \|p_1 - p_2\|_{H^1(\Omega)} \\ \leq\ & C\{\|w_t(q_1,p_1) - w_t(q_2,p_2)\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|w_{tt}(q_1,p_1) - w_{tt}(q_2,p_2)\|_{L^2[\Sigma_1]} \\ &+ \|z_t(q_1,p_1)(x,t) - z_t(q_2,p_2)(x,t)\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|z_{tt}(q_1,p_1) - z_{tt}(q_2,p_2)\|_{L^2[\Sigma_1]}\} \end{aligned}. \tag{5.2.18}$$

Les preuves des théorèmes énoncés ci-dessus dans ce chapitre sont basées sur l'estimation de Carleman (2.2.15) pour l'équation d'ondes et l'estimation de Carleman (2.2.22) pour l'équation de Schrödinger et l'inégalité d'observabilité continue pour le $\{w,z\}$-système (5.1.1$a$)-(5.1.1$e$) avec $g_1 = g_2 = 0$.

## 5.3 Unicité du problème inverse dans le cas linéaire

**Démonstration du théorème 5.2.1**

**Étape 1.**

**Proposition 5.3.1** *Supposons* $(H_i), (H_{ii}), (H_{iii})$, (5.2.1), (5.2.2), (5.2.5), *et* (5.2.6). *Alors la famille à un paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le* $\{u, v\}$*-système (*5.1.4*a*)-(5.1.4*d*)

$$\begin{aligned} &K_{1.\tau.data} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right] dQ + K_{2.\tau.data} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u|^2 + |v|^2 \right] dQ \\ &\leq 8 \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |fR_1|^2 + |gR_2|^2 \right] dQ + \left( C_{1,T} + c_p \right) e^{2\tau\sigma} \int_Q |u|^2 \, dQ \\ &+ M\tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[ E_u(0) + E_u(T) + E_v(0) + E_v(T) \right], \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

*pour* $\tau > 0$ *suffisamment grand, où*

$$\begin{aligned} K_{1.\tau.data} &= \min \left\{ C_{1,\tau}, \widetilde{C}_{1,\tau} \right\} > 0 \qquad \textit{(d'ordre } \tau \textit{ à l'infini)}, \\ K_{2.\tau.data} &= \min \left\{ \left( C_{2,\tau} - c_p \right), \left( \widetilde{C}_{2,\tau} - c_q \right) \right\} > 0 \qquad \textit{(d'ordre } \tau^3 \textit{ à l'infini)}, \\ M &= \max \left\{ c_T, C_{d;T} \right\}. \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

*Ici* $\{C_{1,\tau}, C_{2,\tau}\}$ *sont définies dans* (2.2.16) *et* $\left\{ \widetilde{C}_{1,\tau},\ \widetilde{C}_{2,\tau} \right\}$ *sont définies dans* (2.2.24) *tandis que* $c_q$, $c_p$ *sont les constantes définies ci-dessous dans* (5.3.6) *et* (5.3.11).

**Preuve de la proposition 5.3.1**

Rvenons à (5.1.4*a*) pour $u = u(f, g)(x, t)$, $v = v(f, g)(x, t)$, c'est-à-dire, considérons l'équation

$$u_{tt} - \Delta u = q(x) v + f(x) R_1(x, t). \tag{5.3.3}$$

Pour s'adapter à l'équation (2.2.13), posons

$$F^{(u)}(x, t) = q(x) v + f(x) R_1(x, t). \tag{5.3.4}$$

Par les hypothèses, (5.2.2) sur $q$, (5.2.5) sur $v$ ,et (5.2.3) sur $fR_1$, ainsi $F^{(u)} \in L^2(Q)$. Par conséquent, le théorème 2.2.2 s'applique (l'estimation (2.2.15)) à (5.3.3), (5.3.4) et on obtient

$$\begin{aligned} &BT|_\Sigma(u) + 2 \int_Q e^{2\tau\varphi} \left| q(x) v + f(x) R_1(x, t) \right|^2 dQ + C_{1,T} e^{2\tau\sigma} \int_Q |u|^2 \, dQ \\ &\geq C_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right] dQ + C_{2,\tau} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dxdt \\ &- c_T \tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[ E_u(0) + E_u(T) \right]. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Puisque on a $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma}=0$, $u|_{\Sigma_1}=0$, et $q\in L^{\infty}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} BT|_{\Sigma}(u)&=0,\\ \int_Q e^{2\tau\varphi}\left|q(x)\upsilon+fR_1\right|^2dQ&\leq c_q\int_Q e^{2\tau\varphi}|\upsilon|^2dQ+2\int_Q e^{2\tau\varphi}|fR_1|^2dQ. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Lnisertion de (5.3.6) dans (5.3.5) donne l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u_t|^2+|\nabla u|^2\right]dQ+C_{2,\tau}\int_{Q(\sigma)}e^{2\tau\varphi}|u|^2dxdt\\ &\leq c_q\int_Q e^{2\tau\varphi}|\upsilon|^2dQ+4\int_Q e^{2\tau\varphi}|fR_1|^2dQ+C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q|u|^2dQ\\ &+c_T\tau^3e^{-2\tau\delta}\left[E_u(0)+E_u(T)\right]. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Revenons maintenant à (5.1.4*b*) pour $u=u(f,g)(x,t)$, $\upsilon=\upsilon(f,g)(x,t)$ c'est-à-dire, considérons l'équation

$$i\upsilon_t+\Delta\upsilon=p(x)u+g(x)R_2(x,t). \tag{5.3.8}$$

Pour s'adapter à l'équation (2.2.20), posons

$$F^{(\upsilon)}(x,t)=p(x)u+g(x)R_2(x,t). \tag{5.3.9}$$

Par les hypothèses, (5.2.2) sur $p$, (5.2.5) sur $u$ et (5.2.3) sur $gR_2$, ainsi $F^{(\upsilon)}\in L^2\left(0,T,H^1(\Omega)\right)$. Par conséquent, le théorème 2.2.4 s'applique (l'estimation (2.2.22)) à (5.3.8), (5.3.9) et on obtient

$$\begin{aligned} &B|_{\Sigma}(\upsilon)+4\int_Q e^{2\tau\varphi}\left|p(x)u+g(x)R_2(x,t)\right|^2dQ\\ &\geq\widetilde{C}_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|\nabla\upsilon|^2\right]dQ+\widetilde{C}_{2,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}|\upsilon|^2dQ-C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_\upsilon(0)+E_\upsilon(T)\right], \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Puisque on a $\frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}|_{\Sigma}=0$ , $\upsilon|_{\Sigma_1}=0$, et $p\in W^{1.\infty}(\Omega)\subset L^{\infty}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} B|_{\Sigma}(\upsilon)&=0,\\ \int_Q e^{2\tau\varphi}|pu+gR_2|^2dQ&\leq c_p\int_Q e^{2\tau\varphi}|u|^2dQ+2\int_Q e^{2\tau\varphi}|gR_2|^2dQ. \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Substitution de (5.3.11) dans (5.3.10) donne l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &\widetilde{C}_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|\nabla\upsilon|^2\right]dQ+\widetilde{C}_{2,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}|\upsilon|^2dQ\\ &\leq c_p\int_Q e^{2\tau\varphi}|u|^2dQ+8\int_Q e^{2\tau\varphi}|gR_2|^2dQ\ +C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_\upsilon(0)+E_\upsilon(T)\right]. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

De (2.2.11), on obtient l'estimation suivante pour les termes intégraux du membre droit de l'inégalité (5.3.12)

$$c_p \int_Q e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dQ = c_p \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dxdt + c_p \int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dxdt, \tag{5.3.13}$$

et

$$c_p \int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dxdt \ \leq c_p e^{2\tau\sigma} \int_{Q/Q(\sigma)} |u|^2 \, dxdt \ \leq c_p \ e^{2\tau\sigma} \int_Q |u|^2 \, dQ. \tag{5.3.14}$$

En substituant (5.3.13) dans le premier terme intégral du membre droit de l'estimation (5.3.12) et en utilisant (5.3.14), on obtient

$$\begin{aligned} &\widetilde{C}_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |\nabla v|^2 \right] dQ + \widetilde{C}_{2,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} |v|^2 \, dQ \\ &\leq c_p \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dxdt + c_p \ e^{2\tau\sigma} \int_Q |u|^2 \, dQ + 8 \int_Q e^{2\tau\varphi} |gR_2|^2 \, dQ \ + C_{d;T} \tau e^{-2\tau\delta} \left[ E_v(0) + E_v(T) \right]. \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Les estimations (5.3.7) et (5.3.15) donne, pour tout $\tau$ suffisamment grand

$$\begin{aligned} &C_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right] dQ + (C_{2,\tau} - c_p) \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |u|^2 \, dQ + \\ &\widetilde{C}_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |\nabla v|^2 \right] dQ + \left( \widetilde{C}_{2,\tau} - c_q \right) \int_Q e^{2\tau\varphi} |v|^2 \, dQ \\ &\leq 8 \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |fR_1|^2 + |gR_2|^2 \right] dQ + (C_{1,T} + c_p) \, e^{2\tau\sigma} \int_Q |u|^2 \, dQ \\ &+ M\tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[ E_u(0) + E_u(T) + E_v(0) + E_v(T) \right], \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

puisque $\left( \widetilde{C}_{2,\tau} - c_q \right) \int_Q e^{2\tau\varphi} |v|^2 \, dQ \geq \left( \widetilde{C}_{2,\tau} - c_q \right) \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |v|^2 \, dQ$, l'estimation souhaitée (5.3.1) se déduit de (5.3.16), en vertu (5.3.2).

**Étape 2.** On dérive le $\{u, v\}$-système (5.1.4$a$)-(5.1.4$d$) par rapport à $t$, nous obtenons

$$(u_t)_{tt} - \Delta(u_t) = q(x)(v_t) + f(x) R_{1t}(x,t) \qquad \text{dans } Q \tag{5.3.17a}$$

$$i(v_t)_t + \Delta(v_t) = p(x)(u_t) + g(x) R_{2t}(x,t) \qquad \text{dans } Q \tag{5.3.17b}$$

$$(u_t)\left(., \frac{T}{2}\right) = 0, \quad (u_t)_t \left(., \frac{T}{2}\right) = f(x) R_1 \left(., \frac{T}{2}\right) \in L^2(\Omega) \qquad \text{dans } \Omega \tag{5.3.17c}$$

$$(v_t)\left(., \frac{T}{2}\right) = -ig(x) R_2 \left(., \frac{T}{2}\right) \in H^1(\Omega) \qquad \text{dans } \Omega \tag{5.3.17d}$$

$$\frac{\partial(u_t)}{\partial \nu}|_\Sigma = 0, \frac{\partial(v_t)}{\partial \nu}|_\Sigma = 0. \qquad \text{sur } \Sigma \tag{5.3.17e}$$

**Proposition 5.3.2** *Supposons* $(H_i), (H_{ii}), (H_{iii})$, (5.2.1), (5.2.2), (5.2.5), *et* (5.2.6). *Alors la famille à un*

*paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le système* (5.3.17$a$)-(5.3.17$e$)

$$\begin{aligned}
&L_{1.\tau.data}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u_{tt}|^2+|\nabla u_t|^2+|\nabla \upsilon_t|^2\right]dQ+L_{2.\tau.data}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[|u_t|^2+|\upsilon_t|^2\right]dQ\\
&\leq 8\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_{1t}|^2+|gR_{2t}|^2\right]dQ+\left(C_{1,T}+c_p\right)e^{2\tau\sigma}\int_Q |u_t|^2\,dQ\\
&+M\tau^3e^{-2\tau\delta}\left[E_{u_t}(0)+E_{u_t}(T)+E_{\upsilon_t}(0)+E_{\upsilon_t}(T)\right], \qquad (5.3.18)
\end{aligned}$$

*pour tout* $\tau>0$ *suffisamment grand, où*

$$\begin{aligned}
L_{1.\tau.data}&=\min\left\{C_{1,\tau},\widetilde{C}_{1,\tau}\right\}>0, && \textit{(d'ordre } \tau \textit{ à l'infini)}\\
L_{2.\tau.data}&=\min\left\{\left(C_{2,\tau}-c_p\right),\left(\widetilde{C}_{2,\tau}-c_q\right),\right\}>0, && \textit{(d'ordre } \tau^3 \textit{ à l'infini)}\\
M&=\max\left\{c_T,C_{d;T}\right\}. && (5.3.19)
\end{aligned}$$

**Preuve de la proposition 5.3.2.**

La preuve est similaire à celle de la proposition 5.3.1. Elle est basée sur le théorème 2.2.2 et le théorème 2.2.4, ainsi que sur les conditions (5.3.17$e$) et (5.2.6), et hypothèse (5.2.2).

**Étape 3.** On dérive le $\{u_t,\upsilon_t\}$-système (5.3.17$a$ − 5.3.17$e$) par rapport à $t$, pour avoir

$$\begin{aligned}
&(u_{tt})_{tt}-\Delta(u_{tt})=q(x)(\upsilon_{tt})+f(x)R_{1tt}(x,t) && \text{dans } Q, && (5.3.20a)\\
&i(\upsilon_{tt})_t+\Delta(\upsilon_{tt})=p(x)(u_{tt})+g(x)R_{2tt}(x,t) && \text{dans } Q, && (5.3.20b)\\
&(u_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right)=f(x)R_1\left(.,\frac{T}{2}\right)\in L^2(\Omega) && \text{dans } \Omega, && (5.3.20c)\\
&(u_{tt})_t\left(.,\frac{T}{2}\right)=f(x)R_{1t}\left(.,\frac{T}{2}\right)-iq(x)g(x)R_2\left(.,\frac{T}{2}\right)\in L^2(\Omega) && \text{dans } \Omega, && (5.3.20d)\\
&(\upsilon_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right)=\Delta\left(g(x)R_2\left(.,\frac{T}{2}\right)\right)-ig(x)R_{2t}\left(.,\frac{T}{2}\right)\in H^{-1}(\Omega) && \text{dans } \Omega, && (5.3.20e)\\
&\frac{\partial(u_{tt})}{\partial\nu}=0,\frac{\partial(\upsilon_{tt})}{\partial\nu}=0 && \text{sur } \Sigma. && (5.3.20f)
\end{aligned}$$

De (5.2.2), on a

. $(u_{tt})_t\left(.,\frac{T}{2}\right)\in L^2(\Omega)$, comme souhaité (voir (5.3.20$d$),

. $(u_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right)$, ne sont que dans $L^2(\Omega)$ (voir (5.3.20$c$)), et non dans $H^1(\Omega)$, comme nécessaire pour invoquer le théorème 2.2.2.

. $(\upsilon_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right)$, est uniquement dans $H^{-1}(\Omega)$ (voir (5.3.20$e$), et pas dans $H^1(\Omega)$, comme nécessaire pour invoquer le théorème 2.2.4.

pour les raisons citées ci-dessus on montre d'abord l'unicité du problème inverse linéaire lorsque

$$f(.)R_1\left(.,\frac{T}{2}\right)\in H^1(\Omega),\ \text{c'est-à-dire que } (u_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right)\in H^1(\Omega), \qquad (5.3.21)$$

$$g(.) R_2\left(., \frac{T}{2}\right) \in H^3(\Omega), \text{ c'est-à-dire que } (\upsilon_{tt})\left(., \frac{T}{2}\right) \in H^1(\Omega), \tag{5.3.22}$$

ce qui est vrai à condition que

$$f \in H^1(\Omega), \text{et } R_1\left(., \frac{T}{2}\right) \text{ est un multiplicateur } H^1(\Omega), \tag{5.3.23}$$

$$g \in H^3(\Omega), \text{ et } R_2\left(., \frac{T}{2}\right) \text{ est un multiplicateur } H^3(\Omega). \tag{5.3.24}$$

Une caractérisation pour (5.3.23) est donnée dans ([63], théorème 1 avec $m = l = 1$, $p = 2$), ainsi qu'une caractérisation pour (5.3.24) est donnée dans ([63], théorème 1 avec $m = l = 3$, $p = 2$). Les conditions suffisantes plus directes pour que (5.3.23), respectivement (5.3.24), aient lieu sont

$$f \in H^1(\Omega), \ R_{1x_j}\left(., \frac{T}{2}\right) \in L^\infty(\Omega), \tag{5.3.25}$$

$$g \in H^3(\Omega), \ R_{2x_j}\left(., \frac{T}{2}\right), \ R_{2x_jx_k}\left(., \frac{T}{2}\right), \ R_{2x_jx_kx_l}\left(., \frac{T}{2}\right) \in L^\infty(\Omega), 1 \leq \ j,k,l \leq n. \tag{5.3.26}$$

Ensuite, Nous étendrons le résultat à tout $f(x) \in L^2(\Omega)$, et $g(x) \in W^{1.\infty}(\Omega)$, en utilisant

$(i)$ La continuité de l'application *map* $\{f,g\} \longrightarrow u(f,g)|_{\Sigma_1}, \upsilon(f;g)|_{\Sigma_1}$

$(ii)$ La densité de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, et la densité de $H^3(\Omega)$ dans $W^{1.\infty}(\Omega)$.

Ainsi, sous les restrictions (5.3.21), (5.3.22) et en vertu aussi de (5.3.20$d$), nous avons la régularité suivante pour les solutions du $\{u_{tt}, \upsilon_{tt}\}$-système (5.3.20$a$)-(5.3.20$f$)

$$u_{tt} \in H^{1.1}(Q), \upsilon_{tt} \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \tag{5.3.27}$$

afin que nous puissions appliquer le théorème 2.2.2 et le théorème 2.2.4 au $\{u_{tt}, \upsilon_{tt}\}$-système (5.3.20$a$)-(5.3.20$f$). Nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 5.3.3** *Supposons* $(H_i), (H_{ii}), (H_{iii})$, (5.2.1), (5.2.6), *et* (5.3.27) *ainsi que* (5.2.2) *où* $f \in H^1(\Omega)$, $g \in H^3(\Omega)$. *Alors la famille à un paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le* $\{u_{tt}, \upsilon_{tt}\}$*-système* (5.3.20$a$ − 5.3.20$f$)

$$\begin{aligned}
&M_{1.\tau.data} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[|u_{ttt}|^2 + |\nabla u_{tt}|^2 + |\nabla \upsilon_{tt}|^2\right] dQ + M_{2.\tau.data} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[|u_{tt}|^2 + |\upsilon_{tt}|^2\right] dQ \\
&\leq 8 \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[|fR_{1tt}|^2 + |gR_{2tt}|^2\right] dQ + (C_{1,T} + C_p) e^{2\tau\sigma} \int_Q |u_{tt}|^2 dQ \\
&+ M\tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[E_{u_{tt}}(0) + E_{u_{tt}}(T) + E_{\upsilon_{tt}}(0) + E_{\upsilon_{tt}}(T)\right],
\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

*pour tout $\tau > 0$ suffisamment grand, où*

$$
\begin{aligned}
M_{1.\tau.data} &= \min\left\{C_{1,\tau}, \widetilde{C}_{1,\tau}\right\} > 0, && \textit{(d'ordre } \tau \textit{ à l'infini)} \\
M_{2.\tau.data} &= \min\left\{\left(C_{2,\tau} - c_p\right), \left(\widetilde{C}_{2,\tau} - c_q\right), \right\} > 0, && \textit{(d'ordre } \tau^3 \textit{ à l'infini)} \\
M &= \max\left\{c_T, C_{d;T}\right\}. && (5.3.29)
\end{aligned}
$$

**Preuve de la proposition 5.3.3**

La preuve est similaire à celle la proposition 5.3.1. Elle est basée sur le théorème 2.2.2 et le théorème 2.2.4, ainsi que sur les conditions (5.3.20$f$) et (5.2.6), et hypothèse (5.2.2).

**Étape 4.** C'est l'étape critique de la preuve. Sous les hypothèses (5.2.2) avec $f \in H^1(\Omega)$, $g \in H^3(\Omega)$, combinons les estimations (5.3.1), (5.3.18) et (5.3.28) pour obtenir la proposition suivante.

**Proposition 5.3.4** *Supposons les hypothèses $(H_i), (H_{ii})$, et $(H_{iii})$, (5.2.1), (5.2.6), ainsi que* (5.2.2) *avec $f \in H^1(\Omega)$, $g \in H^3(\Omega)$. Alors la famille à un paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le $\{u, \upsilon\}$-système (*5.1.4$a$)-(5.1.4$d$)*

$$
\begin{aligned}
&K_{1.\tau.data}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla \upsilon|^2\right]dQ + K_{2.\tau.data}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[|u|^2 + |\upsilon|^2\right]dQ \\
&+ L_{1.\tau.data}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u_{tt}|^2 + |\nabla u_t|^2 + |\nabla \upsilon_t|^2\right]dQ + L_{2.\tau.data}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[|u_t|^2 + |\upsilon_t|^2\right]dQ \\
&+ M_{1.\tau.data}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|u_{ttt}|^2 + |\nabla u_{tt}|^2 + |\nabla \upsilon_{tt}|^2\right]dQ + M_{2.\tau.data}\int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}\left[|u_{tt}|^2 + |\upsilon_{tt}|^2\right]dQ \\
&\leq 8\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_1|^2 + |gR_2|^2 + |fR_{1t}|^2 + |gR_{2t}|^2 + |fR_{1tt}|^2 + |gR_{2tt}|^2\right]dQ \\
&+ \left(C_{1,T} + C_p\right)e^{2\tau\sigma}\int_Q\left[|u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2\right]dQ \\
&+ M\tau^3 e^{-2\tau\delta}[E_u(0) + E_u(T) + E_\upsilon(0) + E_\upsilon(T) + E_{u_t}(0) + E_{u_t}(T) + E_{\upsilon_t}(0) + E_{\upsilon_t}(T) \\
&+ E_{u_{tt}}(0) + E_{u_{tt}}(T) + E_{\upsilon_{tt}}(0) + E_{\upsilon_{tt}}(T)]. \qquad (5.3.30)
\end{aligned}
$$

pour tout $\tau > 0$ suffisamment grand

**Preuve de la proposition 5.3.4**

Nous combinons l'estimation (5.3.1) de la proposition 5.3.1 avec l'estimation (5.3.18) de la proposition 5.3.2 et l'estimation (5.3.28) de la proposition 5.3.3, nous obtenons l'estimation (5.3.30).

**Étape 5.** Nous simplifions le terme intégral du membre droit de l'estimation (5.3.30).

**Proposition 5.3.5** *Pour le terme intégral du membre droit de* (5.3.30)*, on a*

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_1|^2+|gR_2|^2+|fR_{1t}|^2+|gR_{2t}|^2+|fR_{1tt}|^2+|gR_{2tt}|^2\right]dQ\\
&\leq C_R\{\left(\frac{T}{r_1^2}\right)(2cT\tau+1)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}(x,s)\right|^2dsd\Omega+\\
&\left(\frac{T}{r_1^2}\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{ttt}(x,s)\right|^2dsd\Omega+\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega\left|u_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega+\\
&\left(\frac{T}{r_2^2}\right)(2cT\tau+1)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|\upsilon_t(x,s)\right|^2dsd\Omega+\\
&\left(\frac{T}{r_2^2}\right)\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|\upsilon_{tt}(x,s)\right|^2dsd\Omega+\frac{T}{r_2^2}\int_\Omega\left|\upsilon_t(x,0)\right|^2d\Omega\}.
\end{aligned}\tag{5.3.31}$$

**Preuve de la proposition 5.3.5**

*Étape i.* De (5.2.2) sur $R_i, R_{it}, R_{itt}\in L^\infty(Q)$, $i=1,2$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|fR_1|^2+|gR_2|^2+|fR_{1t}|^2+|gR_{2t}|^2+|fR_{1tt}|^2+|gR_{2tt}|^2\right]dQ\\
&\leq C_R\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|f|^2+|g|^2\right]dQ,
\end{aligned}\tag{5.3.32}$$

avec $C_R$ une constante dépendante des normes $L^\infty(Q)$ de $R_i, R_{it}, R_{itt}$.

*Étape ii.* Nous évaluons l'équation (5.1.4$a$) et l'équation (5.1.4$b$) au temps initial $\frac{T}{2}$, et en prenant en considération les conditions initiales (5.1.4$c$), on obtient

$$u_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)=f(x)R_1\left(x,\frac{T}{2}\right),\quad i\upsilon_t\left(x,\frac{T}{2}\right)=g(x)R_2\left(x,\frac{T}{2}\right).\tag{5.3.33}$$

Puisque $\left|R_1\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|\geq r_1>0$ et $\left|R_2\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|\geq r_2>0$ sur $\Omega$ (l'hypothèse (5.2.4)), on a

$$|f(x)|\leq\frac{1}{r_1}\left|u_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|,\quad |g(x)|\leq\frac{1}{r_2}\left|\upsilon_t\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|.\tag{5.3.34}$$

En utilisant (5.3.34), (2.2.8) et (2.2.5) ,on a

$$\begin{aligned}
\int_Q e^{2\tau\varphi}|f|^2dQ&=\int_0^T\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,t)}|f(x)|^2d\Omega dt\leq\frac{1}{r_1^2}\int_0^T\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,t)}\left|u_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|^2d\Omega dt\\
&\leq\frac{T}{r_1^2}\int_\Omega e^{2\tau\varphi\left(x,\frac{T}{2}\right)}\left|u_{tt}\left(x,\frac{T}{2}\right)\right|^2d\Omega\\
&\leq\frac{T}{r_1^2}\left(\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{d}{ds}\left(e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}(x,s)\right|^2\right)dsd\Omega+\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega\right)\\
&\leq\frac{T}{r_1^2}\{4c\tau\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{T}{2}-s\right)e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}(x,s)\right|^2dsd\Omega\\
&+2\int_\Omega\int_0^{\frac{T}{2}}e^{2\tau\varphi(x,s)}\left|u_{tt}(x,s)\right|\left|u_{ttt}(x,s)\right|dsd\Omega+\int_\Omega e^{2\tau\varphi(x,0)}\left|u_{tt}(x,0)\right|^2d\Omega\},
\end{aligned}\tag{5.3.35}$$

l' application de l'inégalité de Yong et du fait que $e^{2\tau\varphi(x,0)} \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2\tau\varphi} |f|^2 dQ \leq & \left\{ \left( \frac{T}{r_1^2} \right) (2cT\tau + 1) \right\} \int_\Omega \int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)} |u_{tt}(x,s)|^2 dsd\Omega \\ & + \left( \frac{T}{r_1^2} \right) \int_\Omega \int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)} |u_{ttt}(x,s)|^2 dsd\Omega + \frac{T}{r_1^2} \int_\Omega |u_{tt}(x,0)|^2 d\Omega, \end{aligned} \tag{5.3.36}$$

*Étape iii.* En procédant d'une façon similaire en utilisant l'hypothèse (5.3.34) sur $g$ , on obtient

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2\tau\varphi} |g|^2 dQ \leq & \left\{ \left( \frac{T}{r_2^2} \right) (2cT\tau + 1) \right\} \int_\Omega \int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)} |\upsilon_t(x,s)|^2 dsd\Omega \\ & + \left( \frac{T}{r_2^2} \right) \int_\Omega \int_0^{\frac{T}{2}} e^{2\tau\varphi(x,s)} |\upsilon_{tt}(x,s)|^2 dsd\Omega + \frac{T}{r_2^2} \int_\Omega |\upsilon_t(x,0)|^2 d\Omega. \end{aligned} \tag{5.3.37}$$

L'estimation (5.3.31) est une conséquence de (5.3.36) , (5.3.37) .

**Étape 6.** Remplaçons l'estimation (5.3.31), sur le membre droit de l'estimation (5.3.30), nous obtenons le résultat suivant

**Proposition 5.3.6** *Sous les hypothèses du théorème 5.2.1 et de plus $f \in H^1(\Omega)$ , $g \in H^3(\Omega)$. Alors, la famille à un paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le $\{u, \upsilon\}$-système (5.1.4a)-(5.1.4d),*

$$\begin{aligned} & K_{1.\tau.data} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla \upsilon|^2 \right] dQ + K_{2.\tau.data} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u|^2 + |\upsilon|^2 \right] dQ \\ & + L_{1.\tau.data} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |u_{tt}|^2 + |\nabla u_t|^2 + |\nabla \upsilon_t|^2 \right] dQ \\ & + \left\{ L_{2.\tau.data} - C_R \left( \frac{T}{r_2^2} \right) (2cT\tau + 1) \right\} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u_t|^2 + |\upsilon_t|^2 \right] dQ \\ & + \left\{ M_{1.\tau.data} - C_R \left( \frac{T}{r_1^2} \right) \right\} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |u_{ttt}|^2 + |\nabla u_{tt}|^2 + |\nabla \upsilon_{tt}|^2 \right] dQ \\ & + \left\{ M_{2.\tau.data} - C_R \left( \frac{T}{r_1^2} + \frac{T}{r_2^2} \right) (2cT\tau + 1) \right\} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u_{tt}|^2 + |\upsilon_{tt}|^2 \right] dQ \\ & \leq C_R \left( \frac{T}{r_2^2} \right) (2cT\tau + 1) \int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |\upsilon_t|^2 dQ \\ & + C_R \left( \frac{T}{r_1^2} + \frac{T}{r_2^2} \right) (2cT\tau + 1) \int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u_{tt}| + |\upsilon_{tt}|^2 \right] dQ + a_{u_{tt},\upsilon_t} \\ & + (C_{1,T} + C_p) e^{2\tau\sigma} K_{u,u_t,u_{tt}} + M\tau^3 e^{-2\tau\delta} [E_{u,\upsilon}]_0^T , \end{aligned} \tag{5.3.38}$$

*pour tout $\tau > 0$ suffisamment grand, où*

$$K_{u,u_t,u_{tt}} = \int_Q \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 \right] dQ, \tag{5.3.39}$$

$$a_{u_{tt},\upsilon_t} = \frac{T}{r_1^2} \int_\Omega |u_{tt}(x,0)|^2 d\Omega + \frac{T}{r_2^2} \int_\Omega |\upsilon_t(x,0)|^2 d\Omega, \tag{5.3.40}$$

$$\begin{aligned} [E_{u,\upsilon}]_0^T = & [E_u(0) + E_u(T) + E_\upsilon(0) + E_\upsilon(T) + E_{u_t}(0) + E_{u_t}(T) + E_{\upsilon_t}(0) + E_{\upsilon_t}(T) \\ & + E_{u_{tt}}(0) + E_{u_{tt}}(T) + E_{\upsilon_{tt}}(0) + E_{\upsilon_{tt}}(T)]. \end{aligned} \tag{5.3.41}$$

**Étape 7**. Par(2.2.11), on a $e^{2\tau\varphi} < e^{2\tau\sigma}$ sur $Q/Q(\sigma)$, alors

$$\begin{aligned}\int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |v_t|^2 \, dQ &\leq e^{2\tau\sigma} \int_{Q/Q(\sigma)} |v_t|^2 \, dQ \leq e^{2\tau\sigma} \int_Q |v_t|^2 \, dQ \\ &\leq e^{2\tau\sigma} \int_Q \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + |v_t|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ, \end{aligned} \tag{5.3.42}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ u_{tt}^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ &\leq e^{2\tau\sigma} \int_{Q/Q(\sigma)} \left[ |u_{tt}|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ \\ &\leq e^{2\tau\sigma} \int_Q \left[ |u_{tt}|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ \\ &\leq e^{2\tau\sigma} \int_Q \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + |v_t|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ, \end{aligned} \tag{5.3.43}$$

$$\begin{aligned}&(C_{1,T} + C_p) \, e^{2\tau\sigma} K_{u,u_t,u_{tt}} \\ &= (C_{1,T} + C_p) \, e^{2\tau\sigma} \int_Q \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 \right] dQ \\ &\leq (C_{1,T} + C_p) \, e^{2\tau\sigma} \, (2cT\tau + 1) \int_Q \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + |v_t|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ. \end{aligned} \tag{5.3.44}$$

Nous remplaçons les inégalités (5.3.42),(5.3.43), (5.3.44) dans le membre droit de l'estimation (5.3.38), nous obtenons l'estimation recherchée dans la proposition suivante.

**Proposition 5.3.7** *Sous les hypothèses du théorème 5.2.1 avec $f \in H^1(\Omega)$, $g \in H^3(\Omega)$. Alors, la famille à un paramètre d'estimations d'énergie suivante est vraie pour le $\{u, v\}$-système (5.1.4a)-(5.1.4d),*

$$\begin{aligned}&K_{1.\tau.data} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ u_t^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right] dQ + K_{2.\tau.data} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u|^2 + |v|^2 \right] dQ \\ &+ L_{1.\tau.data} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |u_{tt}|^2 + |\nabla u_t|^2 + |\nabla v_t|^2 \right] dQ \\ &+ \left\{ L_{2.\tau.data} - C_R \left( \frac{T}{r_2^2} \right) (2cT\tau + 1) \right\} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u_t|^2 + |v_t|^2 \right] dQ \\ &+ \left\{ M_{1.\tau.data} - C_R \left( \frac{T}{r_1^2} \right) \right\} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[ |u_{ttt}|^2 + |\nabla u_{tt}|^2 + |\nabla v_{tt}|^2 \right] dQ \\ &+ \left\{ M_{2.\tau.data} - \tilde{C}_R \, (2cT\tau + 1) \right\} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u_{tt}|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ \\ &\leq \left[ 2\tilde{C}_R + (C_{1,T} + C_p) \right] (2cT\tau + 1) \, e^{2\tau\sigma} \int_Q \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + |v_t|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ \\ &+ a_{u_{tt},v_t} + M\tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[ E_{u,v} \right]_0^T, \end{aligned} \tag{5.3.45}$$

*pour tout $\tau > 0$ suffisamment grand, où*

$$\tilde{C}_R = C_R \left( \frac{T}{r_1^2} + \frac{T}{r_2^2} \right). \tag{5.3.46}$$

**Étape 8.** De (5.3.29), (5.3.19), (5.3.2), (2.2.16) et (2.2.24) , nous remarquons que tous les coefficients des termes intégraux du membre gauche de l'estimation (5.3.45) sont positifs pour $\tau > 0$ suffisamment grand, donc

$$\begin{aligned}
&K_{2.\tau.data} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} \left[ |u|^2 + |v|^2 \right] dQ \\
&\leq \left[ 2\tilde{C}_R + (C_{1,T} + C_p) \right] (2cT\tau + 1)\, e^{2\tau\sigma} \int_Q \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + |v_t|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ \\
&+ a_{u_{tt},v_t} + M\tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[ E_{u,v} \right]_0^T . \qquad (5.3.47)
\end{aligned}$$

Divisons les deux membres de (5.3.47) par $(2cT\tau + 1)\, e^{2\tau\sigma}$, et en rappelant (2.2.11), on obtient pour $\tau > 0$ grand

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2cT\tau + 1)} K_{2.\tau.data} \int_{Q(\sigma)} \left[ |u|^2 + |v|^2 \right] dQ \\
&\leq \tilde{K}_{u,v} + \frac{1}{(2cT\tau + 1)\, e^{2\tau\sigma}} a_{u_{tt},v_t} + \frac{M\tau^3 e^{-2\tau\delta}}{(2cT\tau + 1)\, e^{2\tau\sigma}} \left[ E_{u,v} \right]_0^T \\
&\leq Const_{u,v,data}, \qquad (5.3.48)
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{K}_{u,v} = \left[ 2\tilde{C}_R + (C_{1,T} + C_p) \right] \int_Q \left[ |u|^2 + |u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + |v_t|^2 + |v_{tt}|^2 \right] dQ. \qquad (5.3.49)$$

Puisque $K_{2.\tau.data}$ est d'ordre $\tau^3$ voir (5.3.2) , donc, pour $\tau \to +\infty$ dans (5.3.48)

$$u(x,t) = 0, \quad v(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in Q(\sigma) . \qquad (5.3.50)$$

De (5.3.50) nous trouvons $u_{tt} = 0$, $\Delta u = 0$, $v_{tt} = 0$, $\Delta v = 0$ sur $Q(\sigma)$. Ainsi, en rappelant (5.1.4$a$)-(5.1.4$b$), on obtient

$$f(x)\, R_1(x,t) = 0, \quad g(x)\, R_2(x,t) = 0 \qquad \text{sur } Q(\sigma) . \qquad (5.3.51)$$

Car $t_0 < \frac{T}{2} < t_1$, alors (5.3.51) avec (2.2.12) donnent

$$f(x)\, R_1\left(x, \frac{T}{2}\right) = 0, \; g(x)\, R_2\left(x, \frac{T}{2}\right) = 0 \quad x \in \Omega. \qquad (5.3.52)$$

De l'hypothèse (5.2.4), (5.3.52) implique

$$f(x) = 0, \qquad g(x) = 0 \quad x \in \Omega. \qquad (5.3.53)$$

**Étape 9.** Le $\{u, v\}$-système (5.1.4$a$)-(5.1.4$d$) sous les hypothèses (5.2.2), pour $\{u, v\}$, l'application

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)\right) \\ \{f, g\} &\to \{u, v\}, \end{aligned} \tag{5.3.54}$$

est continue. Par conséquent, par la théorie des traces, l'application

$$\begin{aligned} \Upsilon:\ L^2(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right) \\ \{f, g\} \to \Upsilon\{f, g\} &= \{u|_{\Sigma_1}, v|_{\Sigma_1}\} \end{aligned} \tag{5.3.55}$$

est continue.

Puisque $H^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, et $H^3(\Omega)$ est dense dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, la conclusion (5.3.53) de $\Upsilon\{f, g\} = 0$ pour $\{f, g\} \in H^1(\Omega) \times H^3(\Omega)$, peut être étendu via (5.3.55) à $\Upsilon\{f, g\} = 0$ pour tout $\{f, g\} \in L^2(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega)$). La preuve du théorème 5.2.1 est achevée.

## 5.4 Inégalité d'observabilité

Nos clés pour la preuve du théorème **5.2.2** sont une inégalité d'observabilité et un argument compacité-unicité. Dans ce paragraphe, nous établirons une inégalité d'observabilité pour le système couplé ondes-Schrödinger suivant

$$w_{tt}(x,t) - \Delta w(x,t) = q(x) z(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.4.1a}$$

$$i z_t(x,t) + \Delta z(x,t) = p(x) w(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.4.1b}$$

$$w(., \frac{T}{2}) = w_0(x), w_t(., \frac{T}{2}) = w_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.4.1c}$$

$$z(., \frac{T}{2}) = z_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.4.1d}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu} = 0, \frac{\partial z(x,t)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{5.4.1e}$$

avec conditions initiales et coefficients de potentiel

$$\begin{aligned} &\{w_0, w_1, z_0\} \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \\ &q \in L^\infty(\Omega),\ p \in W^{1.\infty}(\Omega). \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Alors, sa solution satisfait

$$\{w, w_t, z\} \in C\left([0,T], H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)\right), \tag{5.4.3}$$

a fortiori $w \in H^{1.1}(Q)$, en continu. L'inégalité d'observabilité dans le théorème suivant est vraie.

**Théorème 5.4.1** *Supposons que les hypothèses* $(H_i), (H_{ii}), (H_{iii})$, *et* (5.4.2) *sont vérifiées. Soit* $\{w, z\}$ *la solution du système* (5.4.1$a$)-(5.4.1$e$). *Alors pour* $T > T_0$, *il existe une constante* $C = C(\Omega, T, q, p) > 0$ *telle que*

$$\|w_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|w_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z_0\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_T \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[|w|^2 + |w_t|^2 + |z|^2 + |z_t|^2\right] d\Gamma_1 dt. \tag{5.4.4}$$

**Démonstration du théorème 5.4.1**

**Étape 1.**

**Proposition 5.4.1** ***(estimations de Carleman)***. *Soit* $\{w, z\}$ *la solution du* $\{w, z\}$*-système* (5.4.1$a$)-(5.4.1$e$) *telle que* $w$ *soit dans la classe* (2.2.19) *et* $z$ *dans la classe* (2.2.27). *Soit* $\varphi(x,t)$ *la fonction pseudo-convexe définie par* (2.2.5). *Alors, pour* $\tau > 0$ *suffisamment grand, la famille d'estimations à un paramètre suivante est vraie*

$$\begin{aligned} &K_{3.\tau.data} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[|w_t|^2 + |\nabla w|^2 + |w|^2 + |\nabla z|^2 + |z|^2\right] dQ - m\tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[E(T) + E(0)\right] \\ &\leq BT|_\Sigma(w) + B|_\Sigma(z) + const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2)} \left[\|w\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))} + \|z\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))}\right], \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

*où*

$$\begin{aligned} K_{3.\tau.data} &= \min\left\{K_{1.\tau.data},\ K_{2.\tau.data}\right\}, \\ K_{1.\tau.data} &= \min\left\{(C_{1,\tau} - 4c_p), \left(\widetilde{C}_{1,\tau} - 2c_q\right)\right\} > 0, \quad \textit{( d'ordre } \tau \textit{ à l'infini)} \\ K_{2.\tau.data} &= \min\left\{(C_{2,\tau} - 4c_p), \left(\widetilde{C}_{2,\tau} - 2c_q\right)\right\} > 0, \quad \textit{( d'ordre } \tau^3 \textit{ à l'infini)} \\ m &= \max\left\{c_T, C_{d;T}\right\}, \quad E(t) = E_w(t) + E_z(t), \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

*et les termes frontières* $BT|_\Sigma(w)$ *et* $B|_\Sigma(z)$ *sont définis comme dans* (2.2.17) *et respectivement* (2.2.25).

**Preuve de la proposition 5.4.1**

On applique les estimations de Carleman (2.2.15) du théorème 2.2.1 à l'équation (5.4.1$a$) avec $F(x,t) = q(x)z(x,t)$

$$\begin{aligned} &BT|_\Sigma(w) + 2\int_Q e^{2\tau\varphi} |qz|^2 dQ + C_{1,T} e^{2\tau\sigma} \int_Q |w|^2 dQ \\ &\geq C_{1,\tau} \int_Q e^{2\tau\varphi} \left[|w_t|^2 + |\nabla w|^2\right] dQ + C_{2,\tau} \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi} |w|^2 dxdt \\ &- c_T \tau^3 e^{-2\tau\delta} \left[E_w(0) + E_w(T)\right], \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

$$\text{où} \quad C_{1,\tau} = \tau\epsilon\rho, \quad C_{2,\tau} = 2\tau^3\beta + \grave{O}\left(\tau^2\right). \tag{5.4.8}$$

et on applique les estimations de Carleman (2.2.22) du théorème 2.2.3 à l'équation (5.4.1$b$) avec $F(x,t) = p(x)w(x,t)$

$$B|_{\Sigma}(z) + 4\int_Q e^{2\tau\varphi}|pw|^2\,dQ \geq \widetilde{C}_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|\nabla z|^2\right]dQ + \widetilde{C}_{2,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}|z|^2\,dQ - C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_z(0) + E_z(T)\right], \tag{5.4.9}$$

$$\text{où}\ \ \widetilde{C}_{1,\tau} = \delta_0\left(2\tau\rho - \frac{1}{2}\right),\ \widetilde{C}_{2,\tau} = 4\tau^3\rho s^2(1-\delta_0) + \grave{O}\left(\tau^2\right). \tag{5.4.10}$$

Puisque ($\int_Q e^{2\tau\varphi}|w|^2\,dQ = \int_{Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}|w|^2\,dxdt + \int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}|w|^2\,dxdt$ ) et ($e^{2\tau\varphi} \leq e^{2\tau\sigma}$ sur $Q/Q(\sigma)$ voir (2.2.11)), de (5.4.7) on a

$$\begin{aligned}
&C_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|w_t|^2 + |\nabla w|^2\right]dQ + C_{2,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}|w|^2\,dxdt\\
&- c_T\tau^3 e^{-2\tau\delta}\left[E_w(0) + E_w(T)\right]\\
&\leq BT|_{\Sigma}(w) + 2c_q\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|z|^2\right]dQ + C_{1,T}e^{2\tau\sigma}\int_Q |w|^2\,dQ + C_{2,\tau}\int_{Q/Q(\sigma)} e^{2\tau\varphi}|w|^2\,dxdt\\
&\leq BT|_{\Sigma}(w) + 2c_q\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|z|^2 + |\nabla z|^2\right]dQ\\
&+ const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2)}\left[\|w\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))}\right].
\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

De (5.4.9), on a

$$\begin{aligned}
&\widetilde{C}_{1,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}|\nabla z|^2\,dQ + \widetilde{C}_{2,\tau}\int_Q e^{2\tau\varphi}|z|^2\,dQ - C_{d;T}\tau e^{-2\tau\delta}\left[E_z(0) + E_z(T)\right]\\
&\leq B|_{\Sigma}(z) + 4c_p\int_Q e^{2\tau\varphi}|w|^2\,dQ\\
&\leq B|_{\Sigma}(z) + 4c_p\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|w_t|^2 + |\nabla w|^2 + |w|^2\right]dQ + const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2)}\left[\|z\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))}\right].
\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

où on a ajouté le terme $const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2)}\left[\|z\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))}\right]$ au membre droit de (5.4.9).

Combinons les inégalités (5.4.11) et (5.4.12), et rappelons (2.2.18) et (2.2.26), on obtient

$$\begin{aligned}
&(C_{1,\tau} - 4c_p)\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|w_t|^2 + |\nabla w|^2\right]dQ + (C_{2,\tau} - 4c_p)\int_Q e^{2\tau\varphi}|w|^2\,dxdt\\
&+ \left(\widetilde{C}_{1,\tau} - 2c_q\right)\int_Q e^{2\tau\varphi}|\nabla z|^2\,dQ + \left(\widetilde{C}_{2,\tau} - 2c_q\right)\int_Q e^{2\tau\varphi}|z|^2\,dQ\\
&- m\tau^3 e^{-2\tau\delta}\left[E_w(0) + E_w(T) + E_z(0) + E_z(T)\right]\\
&\leq BT|_{\Sigma}(w) + B|_{\Sigma}(z) + const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2)}\left[\|w\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))} + \|z\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))}\right],
\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

alors

$$K_{1.\tau.data}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|w_t|^2+|\nabla w|^2+|\nabla z|^2\right]dQ+K_{2.\tau.data}\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|w|^2+|z|^2\right]dQ$$
$$-m\tau^3e^{-2\tau\delta}\left[E_w(0)+E_w(T)+E_z(0)+E_z(T)\right]$$
$$\leq BT|_\Sigma(w)+B|_\Sigma(z)+const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2)}\left[\|w\|_{C([0,T],\,L^2(\Omega))}+\|z\|_{C([0,T],\,L^2(\Omega))}\right]. \tag{5.4.14}$$

Ceci donne (5.4.5) de la proposition 5.4.1, comme souhaité.

**Étape 2.**

**Proposition 5.4.2** *Soit $\{w,z\}$ la solution du système (5.4.1a)-(5.4.1e) telle que $w\in H^{2.2}(Q)$, et $z\in H^{2.2}(Q)$. Alors, les inégalités suivantes sont vraies pour $0<t\leq T$*

$$\frac{b}{a}e^{-\frac{Ka}{b}t}E(0)-\tilde{A}(T)\leq E(t)\leq\left[\frac{b}{a}E(0)+\tilde{A}(T)\right]e^{Kt}, \tag{5.4.15}$$

*où $E(t)$ est défini dans (5.4.6), et*

$$\tilde{A}(T)=\frac{2}{a}\int_0^T\int_\Gamma\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}w_t\right|d\Gamma dt+\frac{2}{a}\int_0^T\int_{\Gamma_1}|ww_t|\,d\Gamma_1dt$$
$$+2\int_0^T\int_\Gamma\left|\frac{\partial z}{\partial\nu}\right|[|z_t|+|z|+|pw|]\,d\Gamma dt, \tag{5.4.16}$$

$$K=\max\left\{\left(\frac{c_q}{a}+c_p\right),\left(\frac{c_q}{a}+1\right)\right\}. \tag{5.4.17}$$

**Preuve de la proposition 5.4.2**

*Étape i.* Multiplions l'équation (5.4.1a) par $w_t$ et intégrons sur $\Omega$ donne, après avoir appliqué la première identité de Green (théorème A.5, annexe A)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega\left[w_t^2+|\nabla w|^2\right]d\Omega+\int_{\Gamma_1}w^2d\Gamma_1\right)$$
$$=\int_\Gamma\frac{\partial w}{\partial\nu}w_td\Gamma+\int_{\Gamma_1}ww_td\Gamma_1+\int_\Omega q(x)z\;w_td\Omega, \tag{5.4.18}$$

Noter qu'on a ajouté aux deux membres de (5.4.18) le terme $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Gamma_1}w^2d\Gamma_1=\int_{\Gamma_1}ww_td\Gamma_1$.

Intégrons (5.4.18) sur $[s,t]$ et obtenons

$$\Pi_w(t)=\Pi_w(s)+2\int_s^t\int_\Gamma\frac{\partial w}{\partial\nu}w_td\Gamma dr+2\int_s^t\int_{\Gamma_1}ww_td\Gamma_1dr+2\int_s^t\int_\Omega q(x)z\;w_td\Omega dr, \tag{5.4.19}$$

avec

$$\Pi_w(t)=\int_\Omega\left[w_t^2(t)+|\nabla w(t)|^2\right]d\Omega+\int_{\Gamma_1}w^2(t)\,d\Gamma_1. \tag{5.4.20}$$

De (2.2.18) et par (l'égalité (6.3) , [45]) on a

$$aE_w(t) \leq \Pi_w(t) \leq bE_w(t), \tag{5.4.21}$$

pour des constantes positives $a > 0$, $b > 0$. De (5.4.19) et (5.4.21) , on a l'inégalité

$$E_w(t) \leq \frac{b}{a}E_w(s) + \frac{2}{a}\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} w_t d\Gamma dr + \frac{2}{a}\int_s^t \int_{\Gamma_1} w w_t d\Gamma_1 dr + \frac{2}{a}\int_s^t \int_\Omega q(x) z\ w_t d\Omega dr. \tag{5.4.22}$$

*Étape ii.* On applique l'égalité $(iv)$ dans le (lemme A.2, annexe A) à l'équation (5.4.1$b$) où $f = p(.)w \in L^2\left(0,T,H^1(\Omega)\right)$, $F(z) = q_1(x,t)\nabla z + q_0(x,t)z = 0$, avec $q_1 = -ir_1$, et en utilisant l'inégalité de Young (corollaire A.2, annexe A), on a alors l'estimation suivante pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} E_z(t) \leq E_z(s) + 2\ \mathrm{Re}\left(\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial \overline{z}}{\partial \nu}\left[z_t - ipw\right] d\Gamma dr\right) + \\ 2\ \mathrm{Re}\left(i\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu}\overline{z} d\Gamma dr\right) + \int_s^t E_z(r)\, dr + \|pw\|^2_{L^2(s,t,H^1(\Omega))}, \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

où $E_z(t)$ est défini par (2.2.26) .

De (5.4.23), on trouve

$$\begin{aligned} E_z(t) \leq \frac{b}{a}E_z(s) + 2\ \mathrm{Re}\left(\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial \overline{z}}{\partial \nu}\left[z_t - ipw\right] d\Gamma dr\right) + \\ 2\ \mathrm{Re}\left(i\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu}\overline{z} d\Gamma dr\right) + \int_s^t E_z(r)\, dr + \|pw\|^2_{L^2(s,t,H^1(\Omega))}, \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

où $b \geq a$ comme dans (5.4.21).

*Étape iii.* En sommant les deux inégalités (5.4.22) et (5.4.24), et en utilisant (5.4.6), on obtient

$$\begin{aligned} E(t) \leq \frac{b}{a}E(s) + \frac{2}{a}\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} w_t d\Gamma dr + \frac{2}{a}\int_s^t \int_{\Gamma_1} w w_t d\Gamma_1 dr + \\ \frac{2}{a}\int_s^t \int_\Omega q(x) z\ w_t d\Omega dr + 2\ \mathrm{Re}\left(\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial \overline{z}}{\partial \nu}\left[z_t - ipw\right] d\Gamma dr\right) + 2\ \mathrm{Re}\left(i\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu}\overline{z} d\Gamma dr\right) \\ + \int_s^t E_z(r)\, dr + \|pw\|^2_{L^2(s,t,H^1(\Omega))}. \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

En utilisant l'inégalité de Young (corollaire A.2, annexe A) dans l'intégrale sur $\Omega$, on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{a}\int_s^t \int_\Omega q(x) z\ w_t d\Omega dr &\leq \frac{2c_q}{a}\int_s^t \left[\int_\Omega z\ w_t d\Omega\right] dr \\ &\leq \frac{c_q}{a}\int_s^t \left[\|z\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dr \\ &\leq \frac{c_q}{a}\int_s^t \left(E_z(r) + E_w(r)\right) dr, \end{aligned} \tag{5.4.26}$$

où $c_q$ est une constante qui dépend de $q$. on a également

$$\begin{aligned}\|pw\|^2_{L^2(s,t,H^1(\Omega))} &\leq c_p \int_s^t \left[\int_\Omega \left(|w|^2 + |\nabla w|^2\right) d\Omega\right] dr \\ &\leq c_p \int_s^t E_w(r)\, dr, \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

où $c_p$ est une constante qui dépend de $p$.

En insérant (5.4.26) et (5.4.27) dans (5.4.25), on obtient

$$\begin{aligned} E(t) \leq \frac{b}{a}E(s) + \frac{2}{a}\int_s^t\int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} w_t d\Gamma dr + \frac{2}{a}\int_s^t\int_{\Gamma_1} w w_t d\Gamma_1 dr \\ + 2\ \mathrm{Re}\left\{\int_s^t\int_\Gamma \frac{\partial \overline{z}}{\partial \nu}\left[z_t - ipw\right] d\Gamma dr\right\} + 2\ \mathrm{Re}\left\{i\int_s^t\int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial \nu}\overline{z} d\Gamma dr\right\} \\ + \left(\frac{c_q}{a} + c_p\right)\int_s^t E_w(r)\, dr + \left(\frac{c_q}{a} + 1\right)\int_s^t E_z(r)\, dr. \end{aligned} \tag{5.4.28}$$

De (5.4.28), on a

$$\left|E(t) - \frac{b}{a}E(s)\right| \leq \tilde{A}(T) + K\int_s^t E(r)\, dr, \tag{5.4.29}$$

où $\tilde{A}(T)$ est défini par (5.4.16), et $K$ comme dans (5.4.17).

*Étape iv.* On applique l'inégalité de Gronwall (lemme A.4, annexe A) aux deux inégalités qui résultent de (5.4.29), on obtient, pour $0 \leq s \leq t \leq T$

$$E(t) \leq \left[\frac{b}{a}E(s) + \tilde{A}(T)\right] e^{K(t-s)},\ E(s) \leq \frac{a}{b}\left[E(t) + \tilde{A}(T)\right] e^{\frac{Ka}{b}(t-s)}. \tag{5.4.30}$$

Pour $s = 0$, (5.4.30) donne (5.4.15), comme souhaité.

**Étape 3.**

**Proposition 5.4.3** *Soit $\{w, z\}$ la solution du système (5.4.1a)-(5.4.1e) telle que $w \in H^{2.2}(Q)$, et $z \in H^{2.2}(Q)$. Alors, l'inégalité suivante est vraie*

$$\begin{aligned} &\left[K_{3.\tau.data}K_{t_0,t_1}e^{2\tau\sigma} - m\tau^3\left(1 + \frac{b}{a}e^{KT}\right)e^{-2\tau\delta}\right] E(0) \\ &\leq BT|_\Sigma(w,z) + const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2)}\left[\|w\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))} + \|z\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))}\right], \end{aligned} \tag{5.4.31}$$

*où $\tau$ est suffisamment grand pour que le coefficient de $E(0)$ dans (5.4.31) soit positif, et*

$$BT|_\Sigma(w,z) = BT|_\Sigma(w) + B|_\Sigma(z) + \left\{\left[K_{3.\tau.data}(t_1 - t_0)e^{2\tau\sigma} + m\tau^3 e^{KT}e^{-2\tau\delta}\right]\right\}\tilde{A}(T), \tag{5.4.32}$$

$$K_{t_0,t_1} = -\frac{b^2}{a^2K}\left[e^{-\frac{Ka}{b}t_1} - e^{-\frac{Ka}{b}t_0}\right], \tag{5.4.33}$$

*avec $K_{3.\tau.data}$ et $m$ sont définis comme dans (5.4.6).*

**Preuve de la proposition 5.4.3**

En utilisant l'inégalité de gauche dans (5.4.15), on a par (5.4.16)

$$\int_{t_0}^{t_1} E(t)\,dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{b}{a}e^{-\frac{Ka}{b}t}E(0) - \tilde{A}(T)\right] dt = K_{t_0,t_1}E(0) - (t_1 - t_0)\,\tilde{A}(T), \tag{5.4.34}$$

avec

$$K_{t_0,t_1} = -\frac{b^2}{a^2K}\left[e^{-\frac{Ka}{b}t_1} - e^{-\frac{Ka}{b}t_0}\right].$$

De plus, en rappelant la propriété (2.2.10) pour $\varphi(x,t)$ et (5.4.6), on a

$$\int_Q e^{2\tau\varphi}\left[|w_t|^2 + |\nabla w|^2 + |w|^2 + |\nabla z|^2 + |z|^2\right] dQ > e^{2\tau\sigma}\int_{t_0}^{t_1} E(t)\,dt. \tag{5.4.35}$$

En utilisant maintenant l'inégalité de droite dans (5.4.15), on a l'estimation

$$E(T) + E(0) \leq \left(1 + \frac{b}{a}e^{KT}\right)E(0) + \tilde{A}(T)\,e^{KT}. \tag{5.4.36}$$

En insérant (5.4.34) dans (5.4.35) et en substituant le résultat obtenu, avec (5.4.36), dans le membre de gauche de (5.4.5)), on obtient (5.4.31).

**Étape 4.** Nous étendrons l'estimation (5.4.31) pour la solution $\{w,z\}$ de classe $H^{2.2}(Q)\times H^{2.2}(Q)$, à la solution de classe

$$\begin{gathered}\{w,z\} \in H^{1.1}(Q)\times C\left([0,T],H^1(\Omega)\right)\\ w_t, z_t \in L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right), \tfrac{\partial w}{\partial\nu}, \tfrac{\partial z}{\partial\nu} \in L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right).\end{gathered} \tag{5.4.37}$$

En procédant comme dans ([45], paragraphe 8) et ([46], paragraphe 7), (voir annexe B, théorème B.1).

**Étape 5**. Nous eliminons les traces tangentielles des termes frontières $BT|_\Sigma(w,z)$ dans (5.4.31).

**Proposition 5.4.4** . *Soit* $\{w,z\}$ *la solution du système* (5.4.1$a$)-(5.4.1$e$) *dans la classe* (5.4.37). *Alors, étant donné une partie non vide* $\Gamma_1$ *de* $\Gamma$ *de mesure positive, étant donné* $T>0$ *et étant donné* $\epsilon > \epsilon_0 > 0$ *et* $\epsilon_0$ *arbitrairement petit, il existe une constante* $C_{\epsilon,\epsilon_0,T} > 0$, *telle que*

$$\begin{aligned}&\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_1}\left[|\nabla_{\tan}w|^2 + |\nabla_{\tan}z|^2\right] d\Gamma_1 dt\\ &\leq C_{\epsilon,\epsilon_0,T}\left\{\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|^2 + |w_t|^2 + \left|\frac{\partial z}{\partial\nu}\right|^2 + |z_t|^2\right] d\Gamma_1 dt + \|w\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)} + \|z\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}\right\}.\end{aligned} \tag{5.4.38}$$

**Preuve de la proposition 5.4.4**

On applique le (lemme A.3, annexe A) à l'équation (5.4.1$a$) avec $f = q(x)z$, et on applique le (théorème A.3,

annexe A) à l'équation (5.4.1$b$) avec $f = p(x)w$, on obtient

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\nabla_{\tan}w|^2\,d\Gamma_1 dt$$
$$\leq C_{\epsilon,\epsilon_0,T}\left\{\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|^2+|w_t|^2\right]d\Gamma_1 dt+\|w\|_{L^2\left(0,T,H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(\Omega)\right)}+\|q(x)z\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}\right\}. \tag{5.4.39}$$

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\nabla_{\tan}z|^2\,d\Gamma_1 dt$$
$$\leq C_{\epsilon,\epsilon_0,T}\left\{\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[\left|\frac{\partial z}{\partial\nu}\right|^2+|z_t|^2\right]d\Gamma_1 dt+\|z\|_{L^2\left(0,T,H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(\Omega)\right)}+\|p(x)w\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}\right\}. \tag{5.4.40}$$

Des inégalités (5.4.39), (5.4.40) et de

$$\|q(x)z\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}\leq c_q\|z\|_{,H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)},\|p(x)w\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}\leq c_p\|w\|_{,H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}, \tag{5.4.41}$$

on obtient (5.4.38).

**Étape 6.**

**Proposition 5.4.5** *Soit* $\{w,z\}$ *la solution du système* (5.4.1$a$)-(5.4.1$e$) *dans la classe* (5.4.37). *Alors, il existe* $const_{\varphi,\tau}$ *positive telle que*

$$const_{\varphi,\tau}E(0)\leq\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[|w_t|^2+|w|^2+|z|^2+|z_t|^2\right]d\Gamma_1 dt$$
$$+const_{T,\tau,\varphi,\epsilon_0}\left[\|w\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}+\|z\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}\right]. \tag{5.4.42}$$

*pour* $\tau$ *suffisamment grand*

**Preuve de la proposition 5.4.5**

Pour $\epsilon$ un réel positif fixé, on applique l'estimation (5.4.31) de la proposition 5.4.3 sur l'intervalle $[\epsilon,T-\epsilon]$, plutôt que sur $[0,T]$, on obtient

$$K_{\varphi,\tau,\epsilon}E(\epsilon)\leq BT|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}(w,z)+const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2),\epsilon}\left[\|w\|_{C([0,T],\,L^2(\Omega))}+\|z\|_{C([0,T],\,L^2(\Omega))}\right]. \tag{5.4.43}$$

En utilisant l'inégalité de gauche dans (5.4.15) avec $t=\epsilon$, on a par (5.4.16)

$$\frac{b}{a}e^{-\frac{Ka}{b}\epsilon}E(0)-\tilde{A}(T)\leq E(\epsilon). \tag{5.4.44}$$

Nous insérons ensuite (5.4.44) dans le membre gauche de (5.4.43), obtenant ainsi

$$\begin{aligned}
&K_{\varphi,\tau,\epsilon}\left(\frac{b}{a}e^{-\frac{Ka}{b}\epsilon}\right)E\left(0\right)\\
&\leq BT|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(w,z\right)+K_{\varphi,\tau,\epsilon}\tilde{A}\left(T\right)\\
&+const_{T,\tau,\beta,\sigma,\grave{O}(\tau^2),\epsilon}\left[\left\|w\right\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))}+\left\|z\right\|_{C([0,T],\ L^2(\Omega))}\right].
\end{aligned}\tag{5.4.45}$$

On voit via la définition $BT|\left(w,z\right)$ sur $[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma$ dans (5.4.32) que

$$\begin{aligned}
&BT|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(w,z\right)+K_{\varphi,\tau,\epsilon}\tilde{A}\left(T\right)\\
&=BT|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(w\right)+B|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(z\right)\\
&+\left\{\left[K_{3.\tau.data}\left(t_1-t_0\right)e^{2\tau\sigma}+m\tau^3e^{KT}e^{-2\tau\delta}\right]\right\}\tilde{A}\left(T\right)+K_{\varphi,\tau,\epsilon}\tilde{A}\left(T\right)\\
&\leq BT|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(w\right)+B|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(z\right)+\tilde{K}\tilde{A}\left(T\right),
\end{aligned}\tag{5.4.46}$$

où

$$\tilde{K}=\max\left\{\left[K_{3.\tau.data}\left(t_1-t_0\right)e^{2\tau\sigma}+m\tau^3e^{KT}e^{-2\tau\delta}\right],\ K_{\varphi,\tau,\epsilon}\right\},\tag{5.4.47}$$

Puisque $\frac{\partial w}{\partial\nu}|_{\Sigma}=0,\frac{\partial z}{\partial\nu}|_{\Sigma}=0$ par (5.4.1$e$), alors de (5.4.46), on a via la définition de $BT|_{\Sigma}\left(w\right)$ et $B|_{\Sigma}\left(z\right)$ dans (2.2.17) et (2.2.25) respectivement, et via la définition de $\tilde{A}\left(T\right)$ dans (5.4.16)

$$\begin{aligned}
&BT|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(w,z\right)+K_{\varphi,\tau,\epsilon}\tilde{A}\left(T\right)\\
&\leq BT|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(w\right)+B|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}\left(z\right)+\tilde{K}\tilde{A}\left(T\right)\\
&=2\tau\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma_1}e^{2\tau\varphi}\left[\left|w_t\right|^2-\left|\nabla_{\tan}w\right|^2\right]h.\nu d\Gamma dt\\
&+2\tau\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma_1}e^{2\tau\varphi}\left[2\tau^2\left(\left|h^2\right|-4c^2\left(t-\frac{T}{2}\right)^2\right)+\tau\left(\alpha-\Delta d-2c\right)\right]\left|w\right|^2h.\nu d\Gamma dt\\
&+2\tau\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma_1}e^{2\tau\varphi}\left[2\tau^2\left|h\right|^2+\Phi\right]\left|z\right|^2h.\nu d\Gamma dt-2\tau\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma_1}e^{2\tau\varphi}\left[\xi_t\eta-\xi\eta_t\right]h.\nu d\Gamma dt\\
&-2\tau\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma_1}e^{2\tau\varphi}\left|\nabla_{\tan}z\right|^2h.\nu d\Gamma dt\\
&+\tilde{K}\frac{2}{a}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left|ww_t\right|d\Gamma_1dt\\
&\leq C_{\varphi,\tau}\{\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma_1}\left[\left|w_t\right|^2+\left|w\right|^2+\left|\nabla_{\tan}w\right|^2\right]d\Gamma_1dt+\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\int_{\Gamma_1}\left[\left|z\right|^2+\left|z_t\right|^2+\left|\nabla_{\tan}z\right|^2\right]d\Gamma_1dt\\
&+\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[\left|w_t\right|^2+\left|w\right|^2\right]d\Gamma_1dt\}.
\end{aligned}\tag{5.4.48}$$

Par l'estimation (5.4.38), et du fait que $\frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Sigma}=0, \frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma}=0$, on a, de (5.4.48)

$$\begin{aligned} &BT|_{[\epsilon,T-\epsilon]\times\Gamma}(w,z)+K_{\varphi,\tau,\epsilon}\tilde{A}(T)\\ &\leq C_{\varphi,\tau,T,\epsilon,\epsilon_0}\left\{\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[|w_t|^2+|w|^2+|z|^2+|z_t|^2\right]d\Gamma_1 dt+\|w\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}+\|z\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}\right\}, \end{aligned} \tag{5.4.49}$$

L'insertion (5.4.49) dans le membre droit de (5.4.45) donne (5.4.42), comme souhaité.

**Étape 7.** On élimine les termes $\|w\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}$, $\|z\|_{H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}$ dans l'estimation (5.4.42), en utilisant l'argument de compacité-unicité comme dans les paragraphes 3.7 et 4.7, ou comme dans ([51, 43, 50]), on obtient ainsi l'estimation (5.4.4).

## 5.5 Stabilité du problème inverse dans le cas linéaire

**Démonstration du théorème 5.2.2**

**Étape 1**. Considérons le $\{u_t,\upsilon_t\}$-système (5.3.17$a$)-(5.3.17$e$)

$$(u_t)_{tt}-\Delta(u_t)=q(x)(\upsilon_t)+f(x)R_{1t}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.5.1a}$$

$$i(\upsilon_t)_t+\Delta(\upsilon_t)=p(x)(u_t)+g(x)R_{2t}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.5.1b}$$

$$(u_t)\left(.,\frac{T}{2}\right)=0,\ (u_t)_t\left(.,\frac{T}{2}\right)=f(x)R_1\left(.,\frac{T}{2}\right)\in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.5.1c}$$

$$(\upsilon_t)\left(.,\frac{T}{2}\right)=-ig(x)R_2\left(.,\frac{T}{2}\right)\in H^1(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.5.1d}$$

$$\frac{\partial(u_t)}{\partial\nu}=0,\frac{\partial(\upsilon_t)}{\partial\nu}=0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{5.5.1e}$$

Posons

$$u_t=\hat{u}_t+\tilde{u}_t,\ \upsilon_t=\hat{\upsilon}_t+\tilde{\upsilon}_t, \tag{5.5.2}$$

Où, $\{\hat{u}_t,\hat{\upsilon}_t\}$ est solution de système

$$(\hat{u}_t)_{tt}-\Delta(\hat{u}_t)=q(x)(\hat{\upsilon}_t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.5.3a}$$

$$i(\hat{\upsilon}_t)_t+\Delta(\hat{\upsilon}_t)=p(x)(\hat{u}_t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.5.3b}$$

$$(\hat{u}_t)\left(.,\frac{T}{2}\right)=0,\ (\hat{u}_t)_t\left(.,\frac{T}{2}\right)=f(x)R_1\left(.,\frac{T}{2}\right)\in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.5.3c}$$

$$(\hat{\upsilon}_t)\left(.,\frac{T}{2}\right)=-ig(x)R_2\left(.,\frac{T}{2}\right)\in H^1(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.5.3d}$$

$$\frac{\partial(\hat{u}_t)}{\partial\nu}=0,\frac{\partial(\hat{\upsilon}_t)}{\partial\nu}=0 \quad \text{sur } \Sigma, \tag{5.5.3e}$$

et $\{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\}$ est solution de système

$$(\tilde{u}_t)_{tt} - \Delta(\tilde{u}_t) = q(x)(\tilde{v}_t) + f(x) R_{1t}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.5.4a}$$

$$i(\tilde{v}_t)_t + \Delta(\tilde{v}_t) = p(x)(\tilde{u}_t) + g(x) R_{2t}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.5.4b}$$

$$(\tilde{u}_t)\left(.,\frac{T}{2}\right) = 0, \quad (\tilde{u}_t)_t\left(.,\frac{T}{2}\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.5.4c}$$

$$(\tilde{v}_t)\left(.,\frac{T}{2}\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.5.4d}$$

$$\frac{\partial(\tilde{u}_t)}{\partial\nu} = 0, \frac{\partial(\tilde{v}_t)}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{5.5.4e}$$

**Etape 2.** Au vu des hypothèses (5.4.2) du théorème 5.4.1, nous appliquons l'inégalité d'observabilité (5.4.4) au $\{\hat{u}_t, \hat{v}_t\}$-système (5.5.3$a$)-(5.5.3$e$), de sorte que

$$\begin{aligned}&\left\|f(.) R_1\left(.,\frac{T}{2}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|g(.) R_2\left(.,\frac{T}{2}\right)\right\|^2_{H^1(\Omega)}\\ &\leq C^2_{T,q,p}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[\hat{u}_t^2 + \hat{u}_{tt}^2 + \hat{v}_t^2 + \hat{v}_{tt}^2\right] d\Gamma_1 dt,\end{aligned} \tag{5.5.5}$$

en utilisant (5.2.4) et (5.5.2), on obtient

$$\begin{aligned}&\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leq C\left\{\|\hat{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\hat{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\hat{v}_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\hat{v}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}\\ &\leq C\left\{\|u_t - \tilde{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt} - \tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|v_t - \tilde{v}_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|v_{tt} - \tilde{v}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}\\ &\leq C\left\{\|u_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|v_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|v_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\} +\\ &C\left\{\|\tilde{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\tilde{v}_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\tilde{v}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}.\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Quand on élimine le terme $\left\{\|\tilde{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\tilde{v}_t\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\tilde{v}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\right\}$, on compléter la démonstration du théorème 5.2.2.

**Étape 3.** Pour applique l'argument de compacité-unicité, on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 5.5.1** *Considérons le système* (5.5.4$a$)-(5.5.4$e$) *avec les données*

$$\begin{aligned}&q \in L^\infty(\Omega),\ p \in W^{1.\infty}(\Omega),\quad f \in L^2(\Omega),\ g \in W^{1.\infty}(\Omega)\\ &R_{1t}, R_{1tt} \in L^\infty(Q),\quad R_{2t}, R_{2tt} \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right).\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

*Définissons les opérateurs $K$, $K_1$, $L$ et $L_1$ comme suit*

$$\begin{cases} K : L^2(\Omega) \times W^{1.\infty}(\Omega) \to L^2(\Sigma_1), (K\{f,g\}) = \tilde{u}_t|_{\Sigma_1} \\ K_1 : L^2(\Omega) \times W^{1.\infty}(\Omega) \to L^2(\Sigma_1), (K_1\{f,g\}) = \tilde{u}_{tt}|_{\Sigma_1} \\ L : L^2(\Omega) \times W^{1.\infty}(\Omega) \to L^2(\Sigma_1), \ (L\{f,g\}) = \tilde{v}_t|_{\Sigma_1} \\ L_1 : L^2(\Omega) \times W^{1.\infty}(\Omega) \to L^2(\Sigma_1), (L_1\{f,g\}) = \tilde{v}_{tt}|_{\Sigma_1} \end{cases} \tag{5.5.8}$$

*alors*

$$K, K_1, L \text{ et } L_1 \text{ sont des opérateurs compacts.} \tag{5.5.9}$$

**Preuve de lemme 5.5.1**

*Étape i.* De hypothèses (5.5.7), on a la régularité suivante pour la solution du $\{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\}$-système (5.5.4$a$)-(5.5.4$e$)

$$\{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\} \in H^{1.1}(Q) \times C\left([0,T], H^1(\Omega)\right). \tag{5.5.10}$$

Dérivons le $\{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\}$-système (5.5.4$a$)-(5.5.4$e$) par rapport à $t$, nous obtenons

$$(\tilde{u}_{tt})_{tt} - \Delta(\tilde{u}_{tt}) = q(x)(\tilde{v}_{tt}) + f(x) R_{1tt}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.5.11a}$$

$$i(\tilde{v}_{tt})_t + \Delta(\tilde{v}_{tt}) = p(x)(\tilde{u}_{tt}) + g(x) R_{2tt}(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{5.5.11b}$$

$$(\tilde{u}_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right) = 0, \ (\tilde{u}_{tt})_t\left(.,\frac{T}{2}\right) = f(x) R_{1t}\left(x,\frac{T}{2}\right) \in L^2(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.5.11c}$$

$$(\tilde{v}_{tt})\left(.,\frac{T}{2}\right) = -ig(x) R_{2t}\left(x,\frac{T}{2}\right) \in H^1(\Omega) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.5.11d}$$

$$\frac{\partial(\tilde{u}_{tt})}{\partial\nu} = 0, \frac{\partial(\tilde{v}_{tt})}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{5.5.11e}$$

Sous les hypothèses (5.5.7), on obtient aussi la régularité suivante pour la solution du $\{\tilde{u}_{tt}, \tilde{v}_{tt}\}$-système (5.5.11$a$)-(5.5.11$e$)

$$\{\tilde{u}_{tt}, \tilde{v}_{tt}\} \in H^{1.1}(Q) \times C\left([0,T], H^1(\Omega)\right). \tag{5.5.12}$$

*Étape ii.* Pour le $\{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\}$-système (5.5.4$a$)-(5.5.4$e$), sous les hypothèses (5.5.7), (5.5.10), l'application

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)\right) \\ \{f,g\} &\to \{\tilde{u}_t, \tilde{v}_t\} \end{aligned} \tag{5.5.13}$$

est continue. Ainsi, par la théorie des traces, l'application

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 : \ L^2(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ \{f,g\} \to \Upsilon_1\{f,g\} &= \{\tilde{u}_t|_\Sigma, \tilde{v}_t|_\Sigma\}, \end{aligned} \tag{5.5.14}$$

est continue. Pour le $\{\tilde{u}_{tt}, \tilde{v}_{tt}\}$-système (5.5.11$a$)-(5.5.11$e$), sous les hypothèses (5.5.7), (5.5.12), l'application

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)\right) \\ \{f,g\} &\to \{\tilde{u}_{tt}, \tilde{v}_{tt}\}, \end{aligned} \tag{5.5.15}$$

est continue. Par la théorie des traces, l'application

$$\begin{aligned} \Upsilon_2 :\ L^2(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) &\to C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ \{f,g\} \to \Upsilon_2\{f,g\} &= \{\tilde{u}_{tt}|_\Sigma, \tilde{v}_{tt}|_\Sigma\}, \end{aligned} \tag{5.5.16}$$

est continue.

*Étape iii.* Ainsi, puisque $R_{it} \in L^\infty(Q)$, $i = 1, 2$ (voir (5.5.7)), on déduit de (5.5.14) que

$$\|\tilde{u}_t(f,g)\|_{C\left([0,T],H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_{R_{1t},R_{2t}}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{5.5.17}$$

$$\|\tilde{v}_t(f,g)\|_{C\left([0,T],H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_{R_{1t},R_{2t}}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{5.5.18}$$

De même, à partir de (5.5.16), où $R_{it}$ , $R_{itt} \in L^\infty(Q)$, $i = 1, 2$, on a

$$\|\tilde{u}_{tt}(f,g)\|_{C\left([0,T],H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_{R_{1t},R_{2t},R_{1tt},R_{2tt}}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{5.5.19}$$

$$\|\tilde{v}_{tt}(f,g)\|_{C\left([0,T],H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_{R_{1t},R_{2t},R_{1tt},R_{2tt}}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{5.5.20}$$

Puisque l'injection $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ est compacte, les opérateurs $K, K_1, L$ et $L_1$ sont compacts, via (théorème A.2, annexe A). Ceci complète la démonstration du lemme 5.5.1.

**Étape 4.** Nous utilisons (5.5.9) pour élimine les termes $\|\tilde{u}_t\|_{L^2(\Sigma_1)}$, $\|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}$, $\|\tilde{v}_t\|_{L^2(\Sigma_1)}$, $\|\tilde{v}_{tt}\|_{L^2(\Sigma_1)}$, dans l'estimation (5.5.6), par l'argument de compacité-unicité.

Supposons, par contradiction, que l'inégalité (5.2.8) soit fausse. Alors, il existe des suites, $(f_n)_{n\geq 1} \in L^2(\Omega)$, $(g_n)_{n\geq 1} \in W^{1.\infty}(\Omega)$, telles que

$$\|f_n\|_{L^2(\Omega)} = \|g_n\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad n \geq 1, \tag{5.5.21}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_t(f_n,g_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}(f_n,g_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\upsilon_t(f_n,g_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\upsilon_{tt}(f_n,g_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} = 0. \tag{5.5.22}$$

A partir de (5.5.21), il existe des sous-suites, notées par $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$\{f_n\} \text{ converge faiblement dans } L^2(\Omega) \text{ vers } \{f_0\} \in L^2(\Omega), \tag{5.5.23}$$

$$\{g_n\} \text{ converge faiblement dans } H^1(\Omega) \text{ vers } \{g_0\} \in W^{1.\infty}(\Omega). \tag{5.5.24}$$

Alors (5.5.9) donne

$$\lim_{m,n\to+\infty} \|K\{f_n,g_n\} - K\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} = \lim_{m,n\to+\infty} \|K_1\{f_n,g_n\} - K_1\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} = 0, \tag{5.5.25}$$

$$\lim_{m,n\to+\infty} \|L\{f_n,g_n\} - L\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} = \lim_{m,n\to+\infty} \|L_1\{f_n,g_n\} - L_1\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} = 0. \tag{5.5.26}$$

De (5.5.6), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_m\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq C\{\|u_t(f_n,g_n) - u_t(f_m,g_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}(f_n,g_n) - u_{tt}(f_m,g_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \\
&\|\upsilon_t(f_n,g_n) - \upsilon_t(f_m,g_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\upsilon_{tt}(f_n,g_n) - \upsilon_{tt}(f_m,g_m)\|_{L^2(\Sigma_1)}\}+ \\
&C\{\|K\{f_n,g_n\} - K\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|K_1\{f_n,g_n\} - K_1\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \\
&\|L\{f_n,g_n\} - L\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|L_1\{f_n,g_n\} - L_1\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)}\} \\
&\leq C\{\|u_t(f_n,g_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}(f_n,g_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_t(f_m,g_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_{tt}(f_m,g_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \\
&\|\upsilon_t(f_n,g_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\upsilon_{tt}(f_n,g_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\upsilon_t(f_m,g_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|\upsilon_{tt}(f_m,g_m)\|_{L^2(\Sigma_1)}\}+ \\
&C\{\|K\{f_n,g_n\} - K\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|K_1\{f_n,g_n\} - K_1\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \\
&\|L\{f_n,g_n\} - L\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)} + \|L_1\{f_n,g_n\} - L_1\{f_m,g_m\}\|_{L^2(\Sigma_1)}\}.
\end{aligned} \tag{5.5.27}$$

Par conséquent, par (5.5.22), (5.5.25), et (5.5.26), nous trouvons

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \lim_{n,m\to+\infty} \|g_n - g_m\|_{H^1(\Omega)} = 0, \tag{5.5.28}$$

qui, avec (5.5.23) et (5.5.24), implique

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f_0\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \|g_n - g_0\|_{H^1(\Omega)} = 0. \tag{5.5.29}$$

Ainsi, au vu de (5.5.21), alors

$$\|f_0\|_{L^2(\Omega)} = \|g_0\|_{H^1(\Omega)} = 1. \tag{5.5.30}$$

Puisque pour le $\{u,\upsilon\}$-système (5.1.4$a$)-(5.1.4$d$), l'application $\{f,g\} \to \Upsilon\{f,g\} = \{u|_\Sigma, \upsilon|_\Sigma\}$ est linéaire, alors découle de (5.3.55)

$$\|u(f_n,g_n) - u(f_0,g_0)\|_{C\left([0,T],H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_{R_1,R_2}\left(\|f_n - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_0\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{5.5.31}$$

$$\|\upsilon(f_n,g_n) - \upsilon(f_0,g_0)\|_{C\left([0,T],\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} \leq C_{R_1,R_2}\left(\|f_n - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_0\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{5.5.32}$$

et puisque l'injection $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ est continue, alors

$$\|u(f_n, g_n) - u(f_0, g_0)\|_{C([0,T],\ L^2(\Gamma_1))} \leq C_{R_1,R_2}\left(\|f_n - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_0\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{5.5.33}$$

$$\|v(f_n, g_n) - v(f_0, g_0)\|_{C([0,T],\ L^2(\Gamma_1))} \leq C_{R_1,R_2}\left(\|f_n - f_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g_n - g_0\|_{H^1(\Omega)}\right), \tag{5.5.34}$$

et vu (5.5.29), on trouve

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \|u(f_n, g_n) - u(f_0, g_0)\|_{C([0,T],L^2(\Gamma_1)),} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \|v(f_n, g_n) - v(f_0, g_0)\|_{C([0,T],L^2(\Gamma_1))} = 0. \end{aligned} \tag{5.5.35}$$

De même, pour le $\{u_t, v_t\}$-système (5.3.17$a$)-(5.3.17$e$), on a

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \|u_t(f_n, g_n) - u_t(f_0, g_0)\|_{C([0,T],L^2(\Gamma_1))} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \|v_t(f_n, g_n) - v_t(f_0, g_0)\|_{C([0,T],L^2(\Gamma_1))} = 0. \end{aligned} \tag{5.5.36}$$

Alors, grâce à (5.5.22), combiné avec (5.5.36), on obtient pour $t \in [0, T]$ que

$$u_t(f_0, g_0)|_{\Sigma_1} = v_t(f_0, g_0)|_{\Sigma_1} = 0. \tag{5.5.37}$$

On revient au $\{u, v\}$-système (5.1.4$a$)-(5.1.4$d$), avec $f = f_n \in L^2(\Omega)$, $g = g_n \in W^{1,\infty}(\Omega)$, les conditions initiales sont

$$u(f_n, g_n)\left(., \frac{T}{2}\right) = v(f_n, g_n)\left(., \frac{T}{2}\right) = 0,\ x \in \overline{\Omega}, \tag{5.5.38}$$

Donc

$$u(f_n, g_n)\left(., \frac{T}{2}\right) = v(f_n, g_n)\left(., \frac{T}{2}\right) = 0,\ x \in \Gamma_1, \tag{5.5.39}$$

au sens de trace dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, alors (5.5.39) combiné avec (5.5.35) donne

$$u(f_0, g_0)\left(., \frac{T}{2}\right) = v(f_0, g_0)\left(., \frac{T}{2}\right) = 0,\ x \in \Gamma_1, \tag{5.5.40}$$

et ensuite, en vertu de (5.5.37)

$$u(f_0, g_0) = v(f_0, g_0) = 0.\ \ x \in \Gamma_1,\ 0 < t\ < T. \tag{5.5.41}$$

Finalement, nous appliquons le théorème 5.2.1 pour conclure

$$f_0(x) = g_0(x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{5.5.42}$$

Alors (5.5.42) est une contradiction avec (5.5.30). Ainsi, la preuve du théorème 5.2.2 est achevée.

## 5.6 Unicité et stabilité du problème inverse dans le cas non linéaire

**Démonstration du théorème 5.2.3 et théorème 5.2.4**

On termine ce chapitre par la démonstration du théorème 5.2.3 et du théorème 5.2.4, où le théorème 5.2.3 (unicité du problème inverse non linéaire) se déduit du théorème 5.2.1 (unicité du problème inverse linéaire), tandis que le théorème 5.2.4 (stabilité du problème non linéaire problème inverse) se déduit du théorème 5.2.2 (stabilité du problème linéaire inverse). De retour à (5.1.3), on a

$$\begin{aligned} &f(x) = q_1(x) - q_2(x),\ g(x) = p_1(x) - p_2(x) \\ &R_1(x,t) = z(q_2,p_2)(x,t),\ R_2(x,t) \ = w(q_2,p_2)(x,t) \\ &u(x,t) \ = w(q_1,p_1)(x,t) - w(q_2,p_2)(x,t) \\ &v(x,t) = z(q_1,p_1)(x,t) - z(q_2,p_2)(x,t). \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

De (5.2.9), $f(.) \in L^2(\Omega)$, $g(.) \in W^{1,\infty}(\Omega)$,comme voulu dans le théorème 5.2.1. De plus, l'hypothèse (5.2.13), et (5.2.12) impliquent l'hypothèse (5.2.4),et (5.2.2) sur $R_{ix_j}\left(x,\frac{T}{2}\right)$, $R_{2x_jx_k}\left(x,\frac{T}{2}\right)$, $R_{2x_jx_kx_l}\left(x,\frac{T}{2}\right)$, $i=1,2,\ \ 1\leq\ j,k,l\leq n$. Ainsi, pour pouvoir invoquer le résultat du théorème 5.2.1, aux fonctions

$u = w(q_1,p_1) - w(q_2,p_2)$,et $v = z(q_1,p_1) - z(q_2,p_2)$, solution du $\{u,v\}$-système (5.1.4$a$)-(5.1.4$d$), il reste à vérifier les propriétés de régularité (5.2.2) sur $R_1, R_{1t}, R_{1tt}$, $R_2, R_{2t}, R_{2tt}$ définies par (5.6.1), c'est-à-dire les propriétés de régularité suivantes

$$\begin{cases} z(q_2,p_2), z_t(q_2,p_2), z_{tt}(q_2,p_2) \in C[0,T], H^1(\Omega), \\ w(q_2,p_2), w_t(q_2,p_2), w_{tt}(q_2,p_2) \in C[0,T], H^1(\Omega). \end{cases}$$

Pour se faire, on procède comme suit.

**Étape 1.** Pour le $\{w,z\}$-système (5.1.1$a$)-(5.1.1$e$), posons

$$w = \tilde{w} + \hat{w},\ z = \tilde{z} + \hat{z} \tag{5.6.2}$$

où $(\tilde{w}, \tilde{z})$ est solution de

$$\tilde{w}_{tt} - \Delta\tilde{w} = q(x)\tilde{z} \qquad \text{dans } Q, \tag{5.6.3a}$$

$$i\tilde{z}_t + \Delta\tilde{z} = p(x)\tilde{w} \qquad \text{dans } Q, \tag{5.6.3b}$$

$$\tilde{w}(., \frac{T}{2}) = w_0(x), \tilde{w}_t(., \frac{T}{2}) = w_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{5.6.3c}$$

$$\tilde{z}(., \frac{T}{2}) = z_0(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{5.6.3d}$$

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\nu} = 0, \frac{\partial\tilde{z}}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \tag{5.6.3e}$$

et $(\hat{w}, \hat{z})$ est solution de

$$\hat{w}_{tt} - \Delta\hat{w} = q(x)\hat{z} \qquad \text{dans } Q, \tag{5.6.4a}$$

$$i\hat{z}_t + \Delta\hat{z} = p(x)\hat{w} \qquad \text{dans } Q, \tag{5.6.4b}$$

$$\hat{w}(., \frac{T}{2}) = 0, \quad \hat{w}_t(., \frac{T}{2}) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{5.6.4c}$$

$$\hat{z}(., \frac{T}{2}) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{5.6.4d}$$

$$\frac{\partial\hat{w}}{\partial\nu} = g_1(x,t), \frac{\partial\hat{z}}{\partial\nu} = g_2(x,t) \qquad \text{sur } \Sigma. \tag{5.6.4e}$$

**Étape 2.** Soit $A_N$ l'opérateur linéaire défini dans $L^2(\Omega)$ par

$$A_N h = -\Delta h, \; D(A_N) = \left\{ h \in H^2(\Omega) : \frac{\partial h}{\partial\nu}|_\Gamma = 0 \right\}. \tag{5.6.5}$$

On récrit le $\{\tilde{w}, \tilde{z}\}$-système (5.6.3$a$)-(5.6.3$e$) de manière abstraite dans l'espace $E = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{w}_t \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{w}_t \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{w}(., \frac{T}{2}) \\ \tilde{w}_t(., \frac{T}{2}) \\ \tilde{z}(., \frac{T}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ z_0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{5.6.6}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -A_N & 0 & q \\ -ip & 0 & -iA_N \end{bmatrix} : D(A) \equiv D(A_N) \times D\left(A_N^{\frac{1}{2}}\right) \times D(A_N) \subset E \longrightarrow E, \tag{5.6.7}$$

$$D\left(A_N^{\frac{1}{2}}\right) \equiv H^1(\Omega). \tag{5.6.8}$$

Pour $q(.) \in L^\infty(\Omega)$, $p(.) \in W^{1.\infty}(\Omega)$, $A$ est le générateur d'un groupe fortement continu $e^{At}$ sur l'espace

d'énergie $E$. Par conséquent, les résultats de régularité suivants sont satisfaits

$$\{\tilde{w}, \tilde{w}_t, \tilde{z}\} = e^{At}[w_0, w_1, z_0] \in C([0,T], E), \text{ pour } \{w_0, w_1, z_0\} \in E, \tag{5.6.9}$$

$$\{\tilde{w}, \tilde{w}_t, \tilde{z}\} = e^{At}[w_0, w_1, z_0] \in C([0,T], D(A)), \text{ pour } \{w_0, w_1, z_0\} \in D(A), \tag{5.6.10}$$

De plus, on a, en général, pour $m = 0, 1, 2, ...$

$$D(A^m) = D\left(A_N^{\frac{m+1}{2}}\right) \times D\left(A_N^{\frac{m}{2}}\right) \times D\left(A_N^{\frac{m+1}{2}}\right) \subset H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega), \tag{5.6.11}$$

$$\{\tilde{w}, \tilde{w}_t, \tilde{z}\} = e^{At}[w_0, w_1, z_0] \in C([0,T], D(A^m)), \text{ pour } \{w_0, w_1, z_0\} \in D(A^m) \tag{5.6.12}$$

$$\text{et } \{\tilde{w}_t, \tilde{w}_{tt}, \tilde{z}_t\} = Ae^{At}[w_0, w_1, z_0] \in C\left([0,T], D\left(A^{m-1}\right)\right), \text{ pour } \{w_0, w_1, z_0\} \in D(A^m) \tag{5.6.13}$$

**Étape 3.** En référence au $\{\tilde{w}, \tilde{z}\}$-système(5.6.3$a$)-(5.6.3$e$), avec $q(.) \in L^\infty(\Omega)$, $p(.) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, soit

$$\{w_0, w_1, z_0\} \in D(A^m) \subset H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega), \ m > \frac{\dim \Omega}{2} + 1, \tag{5.6.14}$$

alors de (5.6.11), (5.6.12) et (5.6.13), on a

$$\begin{aligned} \{\tilde{w}(q,p), \tilde{w}_t(q,p), \tilde{w}_{tt}(q,p)\} &\in C\left([0,T], H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)\right), \\ \{\tilde{z}(q,p), \tilde{z}_t(q,p)\} &\in C\left([0,T], H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{5.6.15}$$

Par (5.6.14), on a

$$H^{m-1}(\Omega) \subset H^1(\Omega). \tag{5.6.16}$$

De (5.6.15) et (5.6.16), on obtient

$$\tilde{w}(q,p), \tilde{w}_t(q,p), \tilde{w}_{tt}(q,p), \tilde{z}(q,p), \tilde{z}_t(q,p) \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right) \tag{5.6.17}$$

**Étape 4.** Pour le $\{\hat{w}, \hat{z}\}$-système (5.6.4$a$)-(5.6.4$e$), on a de (5.2.11)

$$g_i \in H^m\left(0,T; L^2(\Gamma)\right) \cap C\left([0,T], H^{\frac{1}{2}+(m-1)}(\Gamma)\right), \quad m > \frac{\dim \Omega}{2} + 1, \tag{5.6.18}$$

alors la solution $\{\hat{w} = \hat{w}(q,p), \hat{z} = \hat{z}(q,p)\}$ satisfait

$$\begin{aligned} \{\hat{w}, \hat{w}_t, \hat{w}_{tt}\} &\in C\left([0,T], H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)\right), \\ \{\hat{z}, \hat{z}_t, \hat{z}_{tt}\} &\in C\left([0,T], H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^{m-1}(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{5.6.19}$$

Alors, à partir de (5.6.19), et (5.6.18) , on a

$$\{\hat{w}, \hat{w}_t, \hat{w}_{tt}, \hat{z}, \hat{z}_t, \hat{z}_{tt}\} \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right). \tag{5.6.20}$$

**Etape 5.** De (5.6.17) et (5.6.20), on conclut que

$$\begin{cases} R_1 = z(q_2,p_2), R_{1t} = z_t(q_2,p_2), R_{1tt} = z_{tt}(q_2,p_2) \in C[0,T], H^1(\Omega) \\ R_2 = w(q_2,p_2), R_{2t} = w_t(q_2,p_2), R_{2tt} = w_{tt}(q_2,p_2) \in C[0,T], H^1(\Omega) \end{cases}. \tag{5.6.21}$$

Ainsi, les hypothèses (5.2.10),(5.2.11) du théorème 5.2.3 impliquent l'hypothèse (5.2.2) sur $R_1, R_{1t}, R_{1tt}$, $R_2, R_{2t}, R_{2tt}$ du théorème 5.2.1.

Donc, l'hypothèse (5.2.16) ,c'est à dire

$$w(q_1,p_1)(x,t) = w(q_2,p_2)(x,t),\ z(q_1,p_1)(x,t) = z(q_1,p_1)(x,t),\ \ (x,t) \in \Sigma_1, \tag{5.6.22}$$

implique via (5.6.1) que

$$u(f,g)(x,t) = 0,\quad \upsilon(f,g)(x,t) = 0,\ \ (x,t) \in \Sigma_1. \tag{5.6.23}$$

D'après le théorème 5.2.1, on obtient

$$\{f(x) = g(x) = 0,\quad x \in \Omega, \tag{5.6.24}$$

et par conséquent

$$\{q_1(x) = q_2(x),\ p_1(x) = p_2(x),\ \ x \in \Omega.$$

De même, le théorème 5.2.2 s'applique également et on obtient alors pour

$f(x) = q_1(x) - q_2(x), g(x) = p_1(x) - p_2(x), u(x,t) = w(q_1,p_1)(x,t) - w(q_2,p_2)(x,t), \upsilon(x,t) = z(q_1,p_1)(x,t) - z(q_2,p_2)(x,t)$, l'estimation de stabilité souhaitée (5.2.18) c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\|q_1 - q_2\|_{L^2(\Omega)} + \|p_1 - p_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C\{\|w_t(q_1,p_1) - w_t(q_2,p_2)\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|w_{tt}(q_1,p_1) - w_{tt}(q_2,p_2)\|_{L^2[\Sigma_1]} + \\ &\|z_t(q_1,p_1)(x,t) - z_t(q_2,p_2)(x,t)\|_{L^2[\Sigma_1]} + \|z_{tt}(q_1,p_1) - z_{tt}(q_2,p_2)\|_{L^2[\Sigma_1]}\}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a étudié des problèmes inverses pour certaines équations aux dérivées partielles définies sur $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, en utilisant des estimations de Carleman et les inégalités d'observabilité correspondantes.

Sous une hypothèse de convexité sur la géométrie du domaine spatial et pour des données de régularité faible, on a établi des résultats d'unicité et de stabilité de Lipschitz pour le problème inverse de la détermination du potentiel dans :

- Un système d'équations d'ondes couplées avec données frontières de Dirichlet non homogènes à partir d'observations de Neumann sur une partie appropriée de la frontière.
- L'équation de Schrödinger avec donnée de Neumann non homogène à partir d'une mesure de Dirichlet dépendante du temps.
- Un système couplé ondes-Schrödinger avec données frontières de type Neumann à partir d'une observation partielle des données de Dirichlet.

Comme perspectives on se propose de montrer des résultats d'unicité et de stabilité de Lipschitz pour les problèmes inverses suivants :

Des travaux sont en cours avec S. Rebiai pour étudier le probléme inverse de la détermination

- des coefficients du potentiel dans un système couplé de deux équations de Schrodinger qui évoluent dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec des conditions aux limites de Dirichlet/Neumann à partir d'une mesure aux limites de Neumann/Dirichlet.
- des coefficients du potentiel dans un système couplé de deux équations de Schrodinger posées sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec des conditions aux limites de Dirichlet à partir d'une mesure frontière de Neumann.
- du potentiel dans une équation d'ondes posée sur un ouvert borné et connexe d'une variété Riemannienne $M$ de dimension $n$ et de métrique $g$.
- Etendre les résultats obtenus dans le chapitre 3 pour un système de $m$ équations d'ondes couplées.

# Annexe A

L'annexe A concerne la présentation de tous les théorèmes tirés de la litérature qu'on a utilisés dans cette thèse.

**Théorème A.1** *(Théorème I.4.1. ([49])) Soit $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ a frontière $\partial\Omega = \Gamma$ de classe $C^2$. Alors il existe une constante $C > 0$, telle que*

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial\theta}{\partial v}\right|^2 d\Sigma \leq C\,(T+1)\left\{\left|\nabla\theta^0\right| + \left|\theta^1\right| + \|f\|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))}\right\}$$

$$\forall\{\theta^0,\ \theta^1,\ f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$$

*où $\theta = \theta(x,t)$ désigne la solution du problème*

$$\theta_{tt} - \Delta\theta = f \qquad \text{dans } Q, \tag{A.1}$$

$$\theta(0) = \theta^0,\ \theta_t(0) = \theta^1 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{A.2}$$

$$\theta = 0 \qquad \text{sur } \Sigma. \tag{A.3}$$

**Théorème A.2** (*Théorème III.2.1. ([66])) Soient $X_0$, $X$, $X_1$, trois espaces de Banach tels que*

$$X_0 \subset X \subset X_1$$

*où l'injection est continue et*

$$X_i \text{ est réflexif},\ i = 0, 1$$

$$\text{l'injection } X_0 \to X \text{ est compacte.}$$

*Soit $T > 0$ un nombre fini fixé, et soient $\alpha_0$ et $\alpha_1$ deux nombres finis tels que $\alpha_i > 1, i = 0, 1$. On considère l'espace*

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mathcal{F}(0, T, \alpha_0, \alpha_1, X_0, X_1)\\ &= \{\upsilon \in L^{\alpha_0}([0,T], X_0),\ \upsilon_t \in L^{\alpha_1}([0,T], X_1).\end{aligned}$$

*Alors l'injection de* $\mathcal{F}$ *dans* $L^{\alpha_0}([0,T],X)$ *est compacte.*

**Théorème A.3** *(Théorème 8.3. ([46])) Soit* $f \in L^2(Q)$ *et soit* $w$ *une solution d'équation*

$$iw + \Delta w = F(w) + f, \qquad dans\ Q,$$

*dans la classe*

$$w \in C\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \frac{\partial w}{\partial \nu}, w_t \in L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right)$$

*Soit* $\Gamma_1$ *une partie non vide de* $\Gamma$ *de mesure positive. Soient* $T$ *et* $\epsilon$ *deux réels tels que* $T > \epsilon > 0$ *et soit* $\epsilon_0 > 0$ *arbitrairement petits. Alors il existe une constante* $C_{\epsilon,\epsilon_0,T} > 0$*, telle que*

$$\begin{aligned}&\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_1} |\nabla_{\tan} w|^2 \, d\Gamma_1 dt \\ &\leq C_{\epsilon,\epsilon_0,T}\left\{\int_0^T\int_{\Gamma}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}|w_t|^2\, d\Gamma_1 dt + \|w\|_{L^2\left(0,T,H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(\Omega)\right)} + \|f\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)}\right\}.\end{aligned}$$

**Théorème A.4** *(Théorème 7.1.1. ([46]))* *On considère le problème*

$$iz_t + \Delta z = F(z) + f \qquad dans\ Q \tag{A.4}$$

$$z(0,.) = z_0 \qquad dans\ \Omega, \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} + z_t = g \qquad sur\ \Sigma. \tag{A.6}$$

*Supposons que* $F(z) = q_1 \cdot \nabla z + q_0 z$ *et satisfait*

$$|F(z)|^2 \leq C_T\left[|\nabla z|^2 + |z|^2\right] \tag{A.7}$$

*et* $|q_1|, q_0 \in L\infty(Q)$*,* $q_1 = \nabla\pi - ir_1$*,* $r_1$ *valeur réelle, avec* $r_1$*,* $q_0$ *satisfaisant*

$$r_1 \in L^\infty\left([0,T], W^{1,\infty}((\Omega)^n)\right), \text{ de sorte que } \frac{\partial r_{1i}}{\partial x_j} \in L^\infty(Q), \ i,j = 1...n \tag{A.8}$$

$$\text{soit } q_0 \in \begin{cases} L^1\left([0,T], W^{1,2}(\Omega)\right)) \\ L^1\left([0,T], W^{1,2+\varepsilon}(\Omega)\right)) \\ L^1\left([0,T], W^{1,n}(\Omega)\right)) \end{cases} \quad \text{ou sinon } (q_0)_t \in \begin{cases} L^1\left([0,T], L^1(\Omega)\right)), & n=1 \\ L^1\left([0,T], L^{1+\varepsilon}(\Omega)\right)), & n=2 \\ L^1\left([0,T], L^{\frac{n}{2}}(\Omega)\right)), & n \geq 3 \end{cases} \tag{A.9}$$

$$\nabla\pi \equiv 0 \ dansQ, \ \begin{cases} et\ soit\ |r_1.\mu|^2 \leq r_1.\nu < 1 \ sur\ \Gamma \\ ou\ sinon\ r_1.\nu = 0 \qquad sur\ \Gamma_0 \end{cases} \tag{A.10}$$

$$les\ coefficients\ r_1, et\ q_0\ sont\ indépendants\ du\ temps \tag{A.11}$$

*Supposons les hypothèses suivantes sur les données*

$$z_0 \in H^1(\Omega),\ f \in L^2\left([0,T], H^1(\Omega)\right),\ g \in L^2\left([0,T], L^2(\Gamma)\right) \tag{A.12}$$

*Alors, le problème* $(A.4)$-$(A.6)$ *a une solution unique, qui, de plus, satisfait l'estimation suivante*

$$\begin{aligned} &E(t) + \epsilon \int_0^t \int_\Gamma |z_t|^2 \, d\Gamma dr + \int_0^t \int_\Gamma \left|\frac{\partial z}{\partial \mu}\right|^2 \left[r_1.\nu - |r_1.\mu|^2\right] d\Gamma dr \\ &\leq E(0) + C_\epsilon \{ \int_0^t \int_\Gamma |g|^2 \, d\Gamma dr + \int_0^t \int_\Omega (|f|^2 \ + |\nabla f|^2) d\Omega dr + \int_0^t E(r)\, dr \}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

**Théorème A.5** *(Première identité de Green) Soient* $\varphi$ *et* $\psi$ *des fonctions scalaires définies sur le domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *de frontière* $\partial\Omega$ *telles que* $\varphi \in H^2(\Omega)$ *et* $\psi \in H^1(\Omega)$. *Soit* $v$ *le vecteur normal orientée sur* $\partial\Omega$ *vers l'extérieur de* $\Omega$. *Alors*

$$\int_\Omega (\psi \Delta\varphi + \nabla\psi.\nabla\varphi)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \psi \nabla\varphi.v ds.$$

**Lemme A.1** (*Lemme 3.6. ([49])) Soit* $\Omega$ *un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$ *a frontière lipschitzienne. Pour tout* $f \in L^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$, $\theta^0 \in H_0^1(\Omega)$ *et* $\theta^1 \in L^2(\Omega)$, *il existe une solution unique* $\theta$ *de problème* $(A.1)$-$(A.3)$, *avec*

$$\theta \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$$

*De plus, il existe une constante* $C > 0$, *telle que*

$$\|\theta\|_{L^\infty\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right)} + \|\theta_t\|_{L^\infty([0,T], L^2(\Omega))} \leq C\{\left|\nabla\theta^0\right| + \left|\theta^1\right| + \|f\|_{L^1([0,T], L^2(\Omega))}\}.$$

**Lemme A.2** *(Lemme 6.1. ([46]), (iv)) Soit* $z$ *une* $H^{2,2}(Q)$*-solution de l'équation de Schrödinger*

$$iz_t + \Delta z = F(z) + f \qquad dans\ Q.$$

*Sous les hypothèses* $(A.7)$, $(A.8)$, $(A.9)$, $(A.10)$ *de ci-dessus, on a*

$$\begin{aligned} E_z(t) - E_z(s) = {} & 2\,\mathrm{Re}\{\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial \bar{z}}{\partial v}\left[z_t + iq_0 z - if\right] d\Gamma d\sigma\} \\ & + \int_s^t \int_\Gamma \left|\frac{\partial z}{\partial v}\right|^2 r_1.v d\Gamma d\sigma + 2\,\mathrm{Re}\{i\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial z}{\partial v}\bar{z} d\Gamma d\sigma\} \\ & + 2\,\mathrm{Re}\{\int_s^t \int_\Gamma \frac{\partial \bar{z}}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial \mu} r_1.\mu d\Gamma d\sigma\} - \int_s^t \int_\Gamma \left|\frac{\partial z}{\partial \mu}\right|^2 r_1.v d\Gamma d\sigma \\ & - 2\,\mathrm{Re}\{\int_s^t \int_\Omega J_{r_1}^{tr} \nabla z.\nabla\bar{z} + iq_0 |\nabla z|^2 + iz\nabla\bar{z}.\nabla q_0 - i\nabla\bar{z}.\nabla f + i(F(z)+f)\bar{z} d\Omega d\sigma\} \\ & - \int_s^t \int_\Omega |\nabla z|^2 \,\mathrm{div}(r_1)\, d\Omega d\sigma. \end{aligned}$$

**Lemme A.3** *(Lemme 9.1. ([45])) Soit $w$ une solution de l'équation*

$$w_{tt} - \Delta w = F(w) + f \qquad \text{dans } Q,$$

*dans la classe*

$$w \in H^{1.1}(Q) \equiv L^2\left(0,T,H^1(\Omega)\right) \cap H^1\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$$
$$w_t, \tfrac{\partial w}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma) = L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right).$$

*Supposons $f \in L^2(Q)$. Soit $\Gamma_1$ une partie non vide de $\Gamma$ de mesure positive. Soient $T$ et $\epsilon$ deux réels tels que $T > \epsilon > 0$ et soit $\epsilon_0 > 0$ arbitrairement petits. Alors il existe une constante $C_{\epsilon,\epsilon_0,T} > 0$, telle que*

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_\Gamma |\nabla_{\tan} w|^2 \, d\Sigma$$
$$\leq C_{\epsilon,\epsilon_0,T} \left\{ \int_0^T \int_\Gamma \left[ \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 + |w_t|^2 \right] d\Sigma + \|w\|_{L^2\left(0,T,H^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}(\Omega)\right)} + \|f\|_{H^{-\frac{1}{2}+\epsilon_0}(Q)} \right\}.$$

**Lemme A.4** *(Lemme de Gronwall) Soit $T$ un réel positif, $C$ une constante positive, $f$ et $g$ deux fonctions vérifiant*

$$f \in L^\infty(0,T),\ f(t) \geq 0 \quad p.p.t,$$
$$g \in L^1(0,T),\ g(t) \geq 0 \quad p.p.t,$$

*et*

$$f(t) \leq C + \int_0^t g(s) f(s)\, ds \ \ p.p.t.$$

*Alors $f$ vérifie*

$$f(t) \leq C \exp\left( \int_0^t g(s)\, ds \right).$$

**Corollaire A.1** *: (Corollaire 5.9.4, chapitre 5, ([60])) Supposons que $0 \leq s \in \mathbb{N}$, $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ est une sous-variété lisse plongée avec bord, et $L$ satisfait*

$$L(x,\partial) = \sum a_{ij}(x)\, \partial_i \partial_j + \sum a_j(x)\, \partial_j + a(x),$$

$$a_{ij}, a_j, a \ \in \ C(\Omega,\mathbb{R}) \ \text{ et } a_{ij} = a_{ji},$$

$$\exists \mu > 0, \left(\forall x \in \Omega, \zeta \in \mathbb{R}^d\right), \sum a_{ij}(x)\, \zeta_i \zeta_j \geq \mu |\zeta|^2,$$

$$\left(\forall \alpha \in \mathbb{N}^d\right), \quad \partial^\alpha (a_{ij}, a_j, a) \in L^\infty(\Omega).$$

*Alors $u \in H^{s+2}(\Omega)$ chaque fois que $u \in H_0^1(\Omega)$, et $Lu \in H^s(\Omega)$. De plus, il existe un $c \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout tel $u$*

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq C\left( \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|Lu\|_{H^s(\Omega)} \right).$$

**Corollaire A.2** *(Inégalité de Young) Soit* $1 < p < \infty$*, alors pour tous* $a, b \geq 0$ *on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

*où* $1 < q < \infty$ *est l'exposant conjugué à* $p$ *définie par* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

# Annexe B

L'annexe B contient les démonstrations de certains résultats dont on a besoin pour établir les résultas principaux de cette thèse

**Lemme B.1** : *Soit $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. On considère le système couplé ondes-ondes suivant*

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = q(x)\,\upsilon(x,t) + f(x)R_1(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{B.1a}$$

$$\upsilon_{tt}(x,t) - \Delta \upsilon(x,t) = p(x)u(x,t) + g(x)R_2(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{B.1b}$$

$$u(.,\frac{T}{2}) = 0, \qquad u_t(.,\frac{T}{2}) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{B.1c}$$

$$\upsilon(.,\frac{T}{2}) = 0, \qquad \upsilon_t(.,\frac{T}{2}) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{B.1d}$$

$$u(x,t) = 0,\ \upsilon(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Sigma. \tag{B.1e}$$

*Pour tout $q,\ p \in L^\infty(\Omega)$, $f,\ g \in L^2(\Omega)$, $R_1, R_2 \in L^\infty(Q)$, avec*

$$u, \upsilon \in C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$$

*il existe une constante $C > 0$, telle que*

i)

$$\|(u)\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{B.2}$$

$$\|(\upsilon)\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}, \tag{B.3}$$

ii)

$$\|(u)_t\|_{L^\infty(0,T,\ L^2(\Omega))} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\} \tag{B.4}$$

$$\|(\upsilon)_t\|_{L^\infty(0,T,\ L^2(\Omega))} \leq C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\} \tag{B.5}$$

iii)

$$\left\| \frac{\partial (u)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\}, \tag{B.6}$$

$$\left\| \frac{\partial (\upsilon)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \tag{B.7}$$

**Preuve de lemme** B.1 :

i) On applique le (lemme A.1, annexe A) à l'équation $(B.1a)$, et l'équation $(B.1b)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|(u)\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} &\leq C \left\{ \|q\upsilon + fR_1\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} \right\} \\ &\leq C \left\{ \|\upsilon\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} + \|f\ \|_{L^2(\Omega)} \right\}, \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned} \|(\upsilon)\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} &\leq C \left\{ \|pu + gR_2\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} \right\} \\ &\leq C \left\{ \|u\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} + \|g\ \|_{L^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned} \tag{B.9}$$

On a aussi

$$\|\upsilon\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} \leq C \|\upsilon\ \|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))} \leq C \|\upsilon\ \|_{L^\infty\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)} \tag{B.10}$$

$$\|u\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} \leq C \|u\ \|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))} \leq C \|u\ \|_{L^\infty\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)} \tag{B.11}$$

De $(B.10)$ et $(B.8)$, on trouve

$$\|(u)\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} \leq C \left\{ \|\upsilon\ \|_{L^\infty\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)} + \|f\ \|_{L^2(\Omega)} \right\} \tag{B.12}$$

L'insertion $(B.9)$ dans le membre droit de $(B.12)$, et en utilisant $(B.11)$, donne $(B.2)$.

La même chose, de $(B.9)$ et $(B.11)$, on trouve

$$\|(\upsilon)\|_{L^\infty\left(0,T,\ H_0^1(\Omega)\right)} \leq C \left\{ \|u\ \|_{L^\infty\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)} + \|g\ \|_{L^2(\Omega)} \right\} \tag{B.13}$$

L'insertion $(B.8)$ dans le membre droit de $(B.13)$, et en utilisant $(B.10)$, donne $(B.3)$.

ii) On applique le (lemme A.1, annexe A) à l'équation $(B.1a)$, et l'équation $(B.1b)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|(u)_t\|_{L^\infty(0,T,\ L^2(\Omega))} &\leq C \left\{ \|q\upsilon + fR_1\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} \right\} \\ &\leq C \left\{ \|\upsilon\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))} + \|f\ \|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\leq C \left\{ \|\upsilon\ \|_{L^\infty\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)} + \|f\ \|_{L^2(\Omega)} \right\} \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}\|(\upsilon)_t\|_{L^\infty(0,T,\ L^2(\Omega))} &\leq C\left\{\|pu+gR_2\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))}\right\}\\ &\leq C\left\{\|u\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))}+\|g\ \|_{L^2(\Omega)}\right\}\\ &\leq C\left\{\|u\ \|_{L^\infty\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)}+\|g\ \|_{L^2(\Omega)}\right\}\end{aligned} \tag{B.15}$$

L'insertion $(B.3)$ dans le membre droit de $(B.14)$, donne $(B.4)$ .Aussi, de $(B.2)$ et $(B.15)$ on trouve $(B.5)$.

iii) on applique le (théorème A.1, annexe A) à l'équation $(B.1a)$, et l'équation $(B.1b)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial(u)}{\partial\nu}\right\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} &\leq C\left\{\|q\upsilon+fR_1\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))}\right\}\\ &\leq C\left\{\|\upsilon\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))}+\|f\ \|_{L^2(\Omega)}\right\}\\ &\leq C\left\{\|\upsilon\ \|_{L^\infty\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)}+\|f\ \|_{L^2(\Omega)}\right\}\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial(\upsilon)}{\partial\nu}\right\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} &\leq C\left\{\|pu+gR_2\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))}\right\}\\ &\leq C\left\{\|u\ \|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))}+\|g\ \|_{L^2(\Omega)}\right\}\\ &\leq C\left\{\|u\ \|_{L^\infty\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)}+\|g\ \|_{L^2(\Omega)}\right\}\end{aligned} \tag{B.17}$$

De $(B.3)$ et $(B.16)$, on trouve $(B.6)$. De la même façon, $(B.7)$ est le résultat de $(B.2)$ et $(B.17)$. Ceci termine la preuve de le lemme B.1.

**Théorème B.1** *On considère le système couplé ondes-Schrödinger suivant*

$$w_{tt}-\Delta w=f_1 \qquad \text{dans } Q, \tag{B.18a}$$

$$iz_t+\Delta z=f_2 \qquad \text{dans } Q, \tag{B.18b}$$

*Soient* $f_1\in L^2\left([0,T],L^2(\Omega)\right)$, $f_2\in L^2\left([0,T],H^1(\Omega)\right)$. *Alors, l'estimation* (5.4.31) *du proposition* ***5.4.3*** *est vraie pour les solutions de système* $(B.18a)$-$(B.18b)$ *dans la classe* (5.4.37), *i.e*

$$\begin{gathered}\{w,z\}\in H^{1.1}(Q)\times C\left([0,T],H^1(\Omega)\right)\\ w_t,z_t\in L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right),\frac{\partial w}{\partial\nu},\frac{\partial z}{\partial\nu}\in L^2\left(0,T,L^2(\Gamma)\right).\end{gathered} \tag{B.19}$$

**Preuve de théorème** B.1

**Étape 1**

Soit $\{w,z\}$ une solution de système $(B.18a)$-$(B.18b)$ dans la classe $(B.19)$, où $f_1\in L^2\left([0,T],L^2(\Omega)\right)$, $f_2\in L^2\left([0,T],H^1(\Omega)\right)$. Définissons les fonctions frontières

$$g_1=\frac{\partial w}{\partial\nu}+w_t\in L^2\left([0,T],L^2(\Gamma)\right),\ g_2=\frac{\partial z}{\partial\nu}+z_t\in L^2\left([0,T],L^2(\Gamma)\right)$$

Soient $w_0 \in H^1(\Omega)$, $w_1 \in L^2(\Omega)$, et $z_0 \in H^1(\Omega)$ les conditions initiales pour une telle solution $\{w, z\}$.

Ainsi, tel $\{w, z\}$ satisfait

$$w_{tt} - \Delta w = f_1 \qquad \text{dans } Q, \tag{B.20a}$$

$$iz_t + \Delta z = f_2 \qquad \text{dans } Q, \tag{B.20b}$$

$$w(0,.) = w_0,\ w_t(0,.) = w_1,\ z(0,.) = z_0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{B.20c}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + w_t = g_1,\quad \frac{\partial z}{\partial \nu} + z_t = g_2 \qquad \text{sur } \Sigma. \tag{B.20d}$$

Ensuite, considérons le problème d'approximation suivant, où $n$ désigne un paramètre réel qui tend vers l'infini

$$w_{tt}^n - \Delta w^n = f_1^n \qquad \text{dans } Q, \tag{B.21a}$$

$$iz_t^n + \Delta z^n = f_2^n \qquad \text{dans } Q, \tag{B.21b}$$

$$w^n(0,.) = w_0^n, w_t^n(0,.) = w_1^n,\ z^n(0,.) = z_0^n \qquad \text{dans } \Omega, \tag{B.21c}$$

$$\frac{\partial w^n}{\partial \nu} + w_t^n = g_1^n,\quad \frac{\partial z^n}{\partial \nu} + z_t^n = g_2^n \qquad \text{sur } \Sigma. \tag{B.21d}$$

où les données du système $(B.21a)$-$(B.21d)$ sont supposées satisfaire les hypothèses suivantes

$$f_1^n \in H^{1.1}(Q),\ \text{et } f_1^n \longrightarrow f_1 \text{ dans } L^2\left([0,T], L^2(\Omega)\right), \tag{B.22}$$

$$f_2^n \in H^{2.2}(Q),\ \text{et } f_2^n \longrightarrow f_2 \text{ dans } L^2\left([0,T], H^1(\Omega)\right), \tag{B.23}$$

$$g_1^n \in H^{1.1}(\Sigma),\ \text{et } g_1^n \longrightarrow g_1 \text{ dans } L^2\left([0,T], L^2(\Gamma)\right), \tag{B.24}$$

$$g_2^n \in H^{1.1}(\Sigma),\ \text{et } g_2^n \longrightarrow g_2 \text{ dans } L^2\left([0,T], L^2(\Gamma)\right), \tag{B.25}$$

$$w_0^n \in H^2(\Omega),\ \text{et } w_0^n \longrightarrow w_0 \text{ dans } H^1(\Omega), \tag{B.26}$$

$$w_1^n \in H^1(\Omega),\ \text{et } w_1^n \longrightarrow w_1 \text{ dans } L^2(\Omega), \tag{B.27}$$

$$z_0^n \in H^2(\Omega),\ \text{et } z_0^n \longrightarrow z_0 \text{ dans } H^1(\Omega). \tag{B.28}$$

**Étape 2**

Pour chaque $n$, le système d'approximation $(B.21a)$-$(B.21d)$ possède les propriétés de régularité suivantes

$$\{w^n, w_t^n, w_{tt}^n, z^n, z_t^n\} \in C\left([0,T], H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\right), \tag{B.29}$$

$$\{z^n, z_t^n\} \in C\left([0,T], H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)\right)$$

**Étape 3**

**Proposition B.1** *Soit $\{w^n, z^n\}$ la solution du système $(B.21a)$-$(B.21d)$. Alors, l'inégalité suivante est vraie*

*pour* $0 < t \leq T$

$$E_{(w^n,z^n)}(t) \leq C_T\{\frac{b}{a}E_{(w^n,z^n)}(0) + \|g_1^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} + \|g_2^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} + \|f_1^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|f_2^n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}\}, \tag{B.30}$$

*avec*

$$C_T = e^{\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{a}+Ó\right)T}. \tag{B.31}$$

**Preuve de la proposition B.1**

*Étape i.* Multiplions l'équation $(B.21a)$ par $w_t^n$ et intégrons sur $\Omega$ donne, après avoir appliqué la première identité de Green (théorème A.5, annexe A)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega \left[|w_t^n|^2 + |\nabla w^n|^2\right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} |w^n|^2 \, d\Gamma_1\right) = \int_\Gamma \frac{\partial w^n}{\partial \nu} w_t^n d\Gamma + \int_{\Gamma_1} w^n w_t^n d\Gamma_1 + \int_\Omega f_1^n \; w_t^n d\Omega, \tag{B.32}$$

Noter qu'on a ajouté aux deux membres de $(B.32)$ le terme $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Gamma_1}|w^n|^2 d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} w^n w_t^n d\Gamma_1$.

Intégrons $(B.32)$ sur $[0,t]$ et obtenons

$$\Pi_{w^n}(t) = \Pi_{w^n}(0) + 2\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial w^n}{\partial \nu} w_t^n d\Gamma dr + 2\int_0^t\int_{\Gamma_1} w^n w_t^n d\Gamma_1 dr + 2\int_0^t\int_\Omega f_1^n \; w_t^n d\Omega dr, \tag{B.33}$$

avec

$$\Pi_{w^n}(t) = \int_\Omega \left[|w_t^n(t)|^2 + |\nabla w^n(t)|^2\right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} |w^n(t)|^2 \, d\Gamma_1, \tag{B.34}$$

pour des constantes positives $b > a > 0$. De (5.4.21) et $(B.33)$, on a l'inégalité

$$E_{w^n}(t) \leq \frac{b}{a}E_{w^n}(0) + \frac{2}{a}\int_0^t\int_\Gamma \frac{\partial w^n}{\partial \nu} w_t^n d\Gamma dr + \frac{2}{a}\int_0^t\int_{\Gamma_1} w^n w_t^n d\Gamma_1 dr + \frac{2}{a}\int_0^t\int_\Omega f_1^n \; w_t^n d\Omega dr. \tag{B.35}$$

Car $\frac{\partial w^n}{\partial \nu} = g_1^n - w_t^n$ par $(B.21d)$, on a

$$E_{w^n}(t) + \frac{2}{a}\int_0^t\int_\Gamma |w_t^n|^2 d\Gamma dr \leq \frac{b}{a}E_{w^n}(0) + \frac{2}{a}\int_0^t\int_\Gamma g_1^n w_t^n d\Gamma dr + \frac{2}{a}\int_0^t\int_{\Gamma_1} w^n w_t^n d\Gamma_1 dr + \frac{2}{a}\int_0^t\int_\Omega f_1^n \; w_t^n d\Omega dr. \tag{B.36}$$

En appliquant l'inégalité de Young (corollaire A.2, annexe A), on trouve

$$E_{w^n}(t) \leq \frac{b}{a}E_{w^n}(0) + \frac{1}{a}\int_0^t\int_\Gamma |g_1^n|^2 d\Gamma dr + \frac{1}{a}\int_0^t\int_{\Gamma_1} |w^n|^2 d\Gamma_1 dr + \frac{1}{a}\int_0^t\int_\Omega |f_1^n|^2 \; d\Omega dr + \frac{1}{a}\int_0^t\int_\Omega |w_t^n|^2 d\Omega dr. \tag{B.37}$$

De (5.4.21) et $(B.34)$ ,on a

$$E_{w^n}(t) \leq \frac{b}{a} E_{w^n}(0) + \frac{1}{a}\int_0^t \int_\Gamma |g_1^n|^2 \, d\Gamma dr + \frac{1}{a}\int_0^t \int_\Omega |f_1^n|^2 \; d\Omega dr + \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a}\right)\int_0^t E_{w^n}(r)\, dr. \tag{B.38}$$

*Étape ii.* On applique l'inégalité $(A.13)$ dans le (théorème A.4, annexe A) à l'équation $(B.21b)$ , avec considération $(B.21c)$ pour $z_0^n$ et $(B.21d)$ pour $g_2^n$

$$E_{z^n}(t) \leq E_{z^n}(0) + \acute{O}_\epsilon \int_0^t \int_\Gamma |g_2^n|^2 \, d\Gamma dr + \acute{O}\int_0^t \int_\Omega (|f_2^n|^2 \; + |\nabla f_2^n|^2) d\Omega dr + \acute{O}\int_0^t E_{z^n}(r)\, dr. \tag{B.39}$$

*Étape iii.* En sommant les deux inégalités $(B.38)$ et $(B.39)$ , on obtient

$$E_{(w^n,z^n)}(t) \leq \left[\frac{b}{a} E_{(w^n,z^n)}(0) + \alpha(T)\right] + \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a} + \acute{O}\right)\int_0^t E_{(w^n,z^n)}(r)\, dr, \tag{B.40}$$

où

$$E_{(w^n,z^n)}(t) = E_{w^n}(t) + E_{z^n}(t), \tag{B.41}$$

$$\alpha(T) = C_\epsilon\{\|g_1^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} + \|g_2^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} + \|f_1^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|f_2^n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}\}. \tag{B.42}$$

On applique l'inégalité de Gronwall (lemme A.4, annexe A) à l'inégalité $(B.40)$ , on obtient, pour $0 \leq t \leq T$

$$E_{(w^n,z^n)}(t) \leq C_T\left[\frac{b}{a} E_{(w^n,z^n)}(0) + \alpha(T)\right], \tag{B.43}$$

donc $(B.43)$ donne $(B.30)$, comme souhaité.

**Étape 4**

De l'estimation $(B.30)$, on a

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[|w^n(x,t)|^2 + |w_t^n(x,t)|^2 + |\nabla w^n(x,t)|^2 + |\nabla z^n(x,t)|^2 + |z^n(x,t)|^2\right] d\Omega \\ &\leq C_T\{\frac{b}{a}\|\{w_0^n, w_1^n, z_0^n\}\|_{H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times H^1(\Omega)} + \|g_1^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} + \|g_2^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma))} \\ &+ \|f_1^n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|f_2^n\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}\},\end{aligned} \tag{B.44}$$

l'estimation $(B.44)$, appliquée aux suites de Cauchy, permet de passer à la limite et d'obtenir les relations

de convergence suivantes

$$w^n \longrightarrow w^* \text{ dans } H^1(Q), \tag{B.45}$$

$$w_t^n \longrightarrow w_t^* \text{ dans } L^2(Q), \tag{B.46}$$

$$w_t^n \longrightarrow w_t^* \text{ dans } L^2(\Sigma) \tag{B.47}$$

$$\frac{\partial w^n}{\partial \nu} \longrightarrow \frac{\partial w^*}{\partial \nu} \text{ dans } L^2(\Sigma), \tag{B.48}$$

$$\frac{\partial w^n}{\partial \mu} \longrightarrow \frac{\partial w^*}{\partial \mu} \text{ dans } L^2(\Sigma), \tag{B.49}$$

$$z^n \longrightarrow z^* \text{ dans } C([0,T], H^1(\Omega)), \tag{B.50}$$

$$z^n \longrightarrow z^* \text{ dans } L^2(\Sigma), \tag{B.51}$$

$$\frac{\partial z^n}{\partial \nu} \longrightarrow \frac{\partial z^*}{\partial \nu} \text{ dans } L^2(\Sigma), \tag{B.52}$$

$$\frac{\partial z^n}{\partial \mu} \longrightarrow \frac{\partial z^*}{\partial \mu} \text{ dans } L^2(\Sigma). \tag{B.53}$$

De $(B.22)$-$(B.28)$ et $(B.45)$-$(B.53)$, en passant à la limite du système $(B.21a)$-$(B.21d)$, on obtient que la limite $\{w^*, z^*\}$ obtenue en $(B.45)$, et $(B.50)$ vérifie

$$w_{tt}^* - \Delta w^* = f_1 \qquad \text{dans } Q, \tag{B.54a}$$

$$iz_t^* + \Delta z^* = f_2 \qquad \text{dans } Q, \tag{B.54b}$$

$$w^*(0,.) = w_0,\ w_t^*(0,.) = w_1,\ z^*(0,.) = z_0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{B.54c}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial \nu} + w_t^* = g_1,\ \ \frac{\partial z^*}{\partial \nu} + z_t^* = g_2 \qquad \text{sur } \Sigma. \tag{B.54d}$$

Comparant le problème $(B.54a)$-$(B.54d)$ au problème $(B.20a)$-$(B.20d)$, et par l'unicité, on a

$$\{w^*, z^*\} = \{w, z\}$$

**Étape 5**

Puisque la solution $\{w^n, z^n\}$ du problème $(B.21a)$-$(B.21d)$ est dans $H^{2.2}(Q)$, par l'étape 1, alors $\{w^n, z^n\}$ satisfait l'estimation (5.4.31) du proposition **5.4.3**. Par les propriétés des limites $(B.45)$-$(B.53)$, on obtient que la limite $\{w^*, z^*\} = \{w, z\}$ satisfait l'estimation l'estimation (5.4.31). La preuve du théorème B.1 est complète.

# Bibliographie


[1] Bardos, C., Lebeau, G. and Rauch, J. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. SIAM Journal on Control and Optimization 30 (5) (1992), 1024–1065.

[2] Baudouin, L. and Puel, J.-P. Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation. Inverse Problems 18, 6 (2002), 1537.

[3] Bellassoued, M. and Choulli, M. Logarithmic stability in the dynamical inverse problem for the Schrödinger equation by arbitrary boundary observation. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees 91 (3) (2009), 233–255.

[4] Bellassoued, M. and Choulli, M. Stability estimate for an inverse problem for the magnetic Schrödinger equation from the Dirichlet-to-Neumann map. Journal of Functional Analysis 258 (1) (2010), 161–195.

[5] Bellassoued, M. and Yamamoto, M. Carleman estimates and applications to inverse problems for hyperbolic systems. Springer, Tokyo, 2017.

[6] Benabdallah, A. Gaitan, P., and Rousseau, J. L. Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation. SIAM Journal on Control and Optimization 46 (5) (2007), 1849–1881.

[7] Braun, O. and Kivshar, Y. S. Kinks in a system of adatomic chains. Journal of Physics : Condensed Matter 2, 27 (1990), 5961.

[8] Bukhgeim, A. L. and Klibanov, M. V. Global uniqueness of a class of multidimensional inverse problems. In Doklady Akademii Nauk (1981). Vol. 260, Russian Academy of Sciences, pp. 269–272.

[9] Bukhgeim, A. L. Introduction to the theory of inverse problems. Vol. 19. Walter de Gruyter, 2000.

[10] Cadoni, M., De Leo, R. and Gaeta, G. Composite model for DNA torsion dynamics. Physical Review E 75 (2) (2007), 021919.

[11] Cannarsa, P., Floridia, G., Gölgeleyen, F. and Yamamoto, M. Inverse coefficient problems for a transport equation by local Carleman estimate. Inverse Problems 35 (10) (2019), 105013.

[12] Carleman, T. Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Almqvist - Wiksell, 1939.

[13] Cavalier, L. Problemes inverses en statistique. Mémoire présenté pour obtenir l'habilitation à diriger des recherches (2003).

[14] Choulli, M. Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques. Vol. 65. Springer Science & Business Media, Berlin, 2009.

[15] Cristofol, M., Gaitan, P. and Ramoul, H. Inverse problems for a 2×2 reaction–diffusion system using a Carleman estimate with one observation. Inverse Problems 22 (5) (2006), 1561.

[16] Cristofol, M. and Soccorsi, E. Stability estimate in an inverse problem for non-autonomous magnetic Schrödinger equations. Applicable Analysis 90 (10) (2011), 1499–1520.

[17] Deng, L. An inverse problem for the Schrödinger equation with variable coefficients and lower order terms. Journal of Mathematical Analysis and Applications 427 (2) (2015), 930–940.

[18] Dou, F. and Yamamoto, M. Logarithmic stability for a coefficient inverse problem of coupled Schrödinger equations. Inverse Problems 35 (7) (2019), 075006.

[19] Dou, F. and Yamamoto, M. Logarithmic stability for coefficients inverse problem of coupled wave equations. arXiv preprint arXiv :2001.02379 (2020).

[20] Egger, H., Engl, H. W. and Klibanov, M. V. Global uniqueness and hölder stability for recovering a nonlinear source term in a parabolic equation. Inverse problems 21 (1) (2004), 271.

[21] Floridia, G. and Takase, H. Inverse problems for first-order hyperbolic equations with time-dependent coefficients. Journal of Differential Equations 305 (2021), 45–71.

[22] Gaitan, P. and Ouzzane, H. Inverse problem for a free transport equation using Carleman estimates. Applicable Analysis 93 (5) (2014), 1073–1086.

[23] Hassi, E., Chorfi, S. and Maniar, L. An inverse problem of radiative potentials and initial temperatures in parabolic equations with dynamic boundary conditions. arXiv preprint arXiv :2103.15116 (2021).

[24] Hazrt, A., Giovannelli, J.-F., Dubost, S. and Chatellier, L. Pollution de milieux poreux : identifiabilité et identification de modèles paramétriques de sources. ACTES 20ème GRETSI, actes (2005), 457–460.

[25] Hormander, L. Linear partial differential operators. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[26] Hormander, L. The Analysis of linear partial differential operators. Vol. 4. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[27] Huang, X., Kian, Y., Soccorsi, E. and Yamamoto, M. Carleman estimate for the Schrödinger equation and application to magnetic inverse problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications 474, 1 (2019), 116–142.

[28] Imanuvilov, O. Y. and Yamamoto, M. Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate. Inverse Problems 14 (5) (1998), 1229.

[29] Imanuvilov, O. Y. and Yamamoto, M. Global lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations. Inverse Problems 17 (4) (2001), 717.

[30] Isakov, V. Carleman estimates and applications to inverse problems. Milan J. Math. 72 (2004), 249-271.

[31] Isakov, V. Inverse problems for partial differential equations. Springer, New York, 2006.

[32] Isakov, V. and Yamamoto, M. Stability in a wave source problem by Dirichlet data on subboundary. J. Inv. Ill-Posed Problems 11 (2003), 399–409.

[33] Kabanikhin, S. I. Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. J. Inv. Ill-Posed Problems 16 (2008), 317–357.

[34] Keller, J. B. Inverse problems. The American Mathematical Monthly 83 (2) (1976), 107–118.

[35] Kern, M. Méthodes numériques pour les problemes inverses. ISTE Group, 2016.

[36] Klibanov, M. Carleman estimates and inverse problems. Inverse Problems 8 (1992), 575–596.

[37] Klibanov, M. V. Inverse problems in the large and Carleman estimates. Differentsial'nye Uravneniya 20, 6 (1984), 1035–1041.

[38] Klibanov, M. V. Global uniqueness of a multidimensional inverse problem for a nonlinear parabolic equation by a Carleman estimate. Inverse Problems 20 (4) (2004), 1003.

[39] Klibanov, M. V. Carleman estimates for global uniqueness, stability and numerical methods for coefficient inverse problems. J. Inv. Ill-Posed Problems 21 (4) (2013), 477–560.

[40] Klibanov, M. V. and Li, J. Inverse Problems and Carleman Estimates : Global Uniqueness, Global Convergence and Experimental Data. Vol. 63. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021.

[41] Klibanov, M. V. and Pamyatnykh, S. E. Global uniqueness for a coefficient inverse problem for the non-stationary transport equation via Carleman estimate. Journal of Mathematical Analysis and Applications 343 (1) (2008), 352–365.

[42] Klibanov,M. V. and Timonov, A. A. Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications. De Gruyter, 2012.

[43] Lasiecka, I. and Triggiani, R. Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary control. Applied Mathematics and Optimization 19 (1) (1989), 243–290.

[44] Lasiecka, I. and Triggiani, R. Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations. In Partial differential equation methods in control and shape analysis. CRC Press, 1997, pp. 231–260.

[45] Lasiecka, I., Triggiani, R. and Zhang, X. Nonconservative wave equations with unobserved Neumann BC : Global uniqueness and observability in one shot. Contemp. Math. 268 (2000), 227–326.

[46] Lasiecka, I., Triggiani, R. and Zhang, X. Global uniqueness, observability and stabilization of nonconservative Schrödinger equations via pointwise Carleman estimates. Part I : $H^1(\Omega)$-estimates. J. Inv. Ill-Posed Problems 12 (1) (2004), 43-123.

[47] Le Rousseau, J. and Lebeau, G. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations. ESAIM Control Optim. Calc. Var.18 (3) :712–747, 2012.

[48] Lecharlier, L. and De Mol, C. Regularized blind deconvolution with poisson data. In Journal of Physics : Conference Series (2013). Vol. 464, IOP Publishing, p. 012003.

[49] Lions, J.-L. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1. RMA 8, Masson, Paris, 1988.

[50] Lions, J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. SIAM Review 30 (1) (1988), 1–68.

[51] Littman, W. Near optimal time boundary controllability for a class of hyperbolic equations. In Control problems for systems described by partial differential equations and applications, pp. 307–312, Springer, 1987, .

[52] Liu, S. and Triggiani, R. Global uniqueness and stability in determining the damping and potential coefficients of an inverse hyperbolic problem. Nonlinear Anal. Real World Appl. 12(3) (2011), 1562-1590.

[53] Liu, S. and Triggiani, R. Global uniqueness and stability in determining the damping coefficient of an inverse hyperbolic problem with nonhomogeneous Neumann bc through an additional Dirichlet boundary trace. SIAM Journal on Mathematical Analysis 43 (4) (2011), 1631–1666.

[54] Liu, S. and Triggiani, R. Global uniqueness in determining electric potentials for a system of strongly coupled Schrödinger equations with magnetic potential terms. J. Inv. Ill-Posed Problems, 25 (2011), 223-254.

[55] Liu, S. and Triggiani, R. Recovering of damping coefficients for a system of coupled wave equations with Neumann boundary conditions : Uniqueness and stability. Chinese Annals of Mathematics, Series B 32 (5) (2011), 669–698.

[56] Mercado, A., Osses, A. and Rosier, L. Inverse problems for the Schrödinger equation via Carleman inequalities with degenerate weights. Inverse Problems 24 (1) (2008), 015017.

[57] Monteiller, V. Tomographie à l'aide de décalages temporels d'ondes sismiques P : développements méthodologiques et applications. Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2005.

[58] Puel, J.-P. and Yamamoto, M. On a global estimate in a linear inverse hyperbolic problem. Inverse Problems 12 (6) (1996), 995.

[59] Ramoul, H., Gaitan, P., and Cristofol, M. Stability results for a reaction-diffusion system with a single measurement. In Journal of Physics : Conference Series (2007). Vol. 73, IOP Publishing, p. 012018.

[60] Rauch, J. Partial differential equations. Springer Science & Business Media, New York, 2012.

[61] Roussel, G. Problèmes inverses. Stic et Environnement (2011).

[62] Saci, A. and Rebiai, S. An inverse problem for the Schrödinger equation with Neumann boundary condition. Advances in Pure and Applied Mathematics 14 (1) (2023), 50-69.

[63] Shaposhnikova, V. M.-T. Theory of multipliers in spaces of differentiable functions. Monographs and studies in mathematics. Vol. 23, Pitman, London, 1985.

[64] Singh, S., Rao, N. and Shukla, P. Nonlinearly coupled langmuir and dust-acoustic waves in a dusty plasma. Journal of Plasma Physics 60 (3) (1998), 551–567.

[65] Takahashi Y. The quantum field theory for material physicist I, II, Baifukan (en japonais).

[66] Temam, R. Navier-Stokes Equations. North-holland Pub. Company, Amsterdam, 1979.

[67] Triggiani, R. Exact boundary controllability on $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ of the wave equation with Dirichlet boundary control acting on a portion of the boundary, and related problems. Applied Mathematics and Optimization 18(1) (1988), 241–277.

[68] Triggiani, R. Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled non-conservative Schrödinger equations. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 28 (1996), suppl., 453–504.

[69] Triggiani, R. and Yao, P. Inverse/observability estimates for Schrödinger equations with variable coefficients. Control Cybern. 28 (1999), 627–664.

[70] Triggiani, R. and Zhang, Z. Global uniqueness and stability in determining the electric potential coefficient of an inverse problem for Schrödinger equations on Riemannian manifolds. J. Inv. Ill-Posed Problems 23 (6) (2015), 587–609.

[71] Yamamoto, M. Uniqueness and stability in multidimensional hyperbolic inverse problems. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 78 (1) (1999), 65–98.

[72] Yuan, G. and Yamamoto, M. Lipschitz stability in the determination of the principal part of a parabolic equation. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations 15 (3) (2009), 525–554.

[73] Yuan, G. and Yamamoto, M. Carleman estimates for the Schrödinger equation and applications to an inverse problem and an observability inequality. Chinese Annals of Mathematics, Series B 31 (4) (2010), 555–578.

[74] Yukawa, H. On the interaction of elementary particles. i. Proceedings of the Physico- Mathematical Society of Japan. 3rd Series 17 (1935), 48–57.

[75] Zhu, X.and Dou, F. Conditional stability of coefficients inverse problem for strongly coupled Schrödinger equations. Applicable Analysis (2021), 1–18.

[76] Zuily, C. Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem. Progress in Mathematics, Vol. 33. Springer, Berlin, 1983.

# ملخص

في هذه الأطروحة، ندرس المسائل العكسية لتحديد معاملات الاحتمال لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية المعرفة على $\Omega$ من $\mathbb{R}^n$ ( نظام مزدوج موجة – موجة, معادلة شرودينجر , نظام مزدوج موجة – شرودينجر )

نبرهن الواحدانية والاستقرار لهذه المسائل العكسية في ضل افترضات محدبة على المجال المكاني $\Omega$ وفي ضل شروط ضعيفة خاصة بصقالة المعطيات. يعتمد البرهان على متراجحة كارلمان لهذه المعادلات التفاضلية الجزئية.

**الكلمات المفتاحية** المسائل العكسية، الوحدانية، الاستقرار ، متراجحات كارلمان، نظام معادلتين للموجة، معادلة شرودينجر، نظام معادلتين للموجة وشرودينجر.

## Résumé

Dans cette thèse, on étudie le problème inverse de la détermination des coefficients de potentiel pour certaines équations aux dérivées partielles définies sur $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ (système ondes-ondes, équation de Schrödinger, système ondes-Schrödinger). On montre l'unicité et la stabilité pour ces problèmes inverses sous certaines hypothèses de convexité sur la géométrie du domaine spatial $\Omega$ et sous des conditions faibles sur la régularité des donnés. La démonstration est basée sur les estimations de Carleman pour ces équations aux dérivées partielles.

**Mots clés** : problèmes inverses, unicité, stabilité, estimations de Carleman, système ondes-ondes, équation de Schrödinger, système ondes-Schrödinger.

## Summary

In this thesis, we study the inverse problem of determining the potential coefficients for some partial differential equations defined on $\Omega$ a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ (wave-wave system, Schrödinger equation, wave-Schrödinger system). We prove the uniqueness and stability for these inverse problems under certain convexity assumptions on the geometry of the spatial domain $\Omega$ and under weak conditions on the regularity of the data. The proof is based on a Carleman estimates for these partial differential equations.

**Keywords** : inverse problems, uniqueness, stability, Carleman estimates, wave-wave system, Schrödinger equation, wave-Schrödinger system.